SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Función exponencial.

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo: $y=10^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=2^{3x}$, $y=5^{-x}$.

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

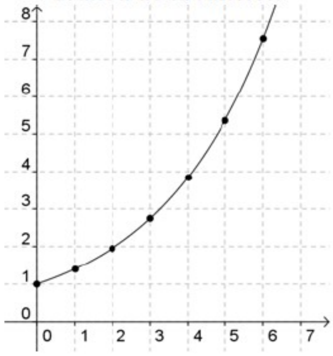
EJERCICIO RESUELTO.

Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número "y" de bacterias que habrá al cabo de "x" horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (x)	Núm. bacterias (y)
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
...	...

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la "x" valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general la "x" sí puede tener valores negativos. Sin embargo la base b solo puede tener valores positivos. Asimismo, observarás que la variable "y" también resulta siempre positiva. Más adelante recogemos estas propiedades al hablar de dominio y recorrido de la función exponencial.

EJERCICIO PROPUESTO.

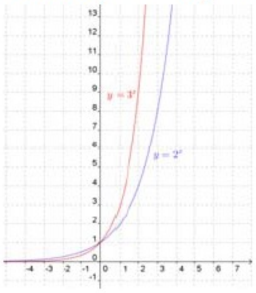
1. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.
   Observarás que los valores de "y" aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de "x" aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 3. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.
2. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

DISTINTAS FUNCIONES EXPONENCIALES.

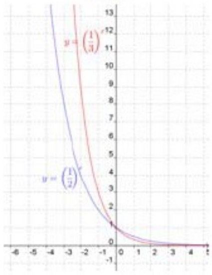
Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "b". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.
En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, "y" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos $(0, 1)$, $(1, b)$ y $(-1, 1/b)$.
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es $b > 1$

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.

Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.

Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Cuando la base es $0 < b < 1$

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.

Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.

Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

Función logarítmica.

Definición y cálculo elemental de logaritmos.

La expresión $\log_b a$ se lee "logaritmo de a en base b".
$\log_b a$ es el exponente al que hay que elevar "b" para que el resultado sea "a".

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

"b" se llama base y "a" se llama **argumento**.

Observaciones:

- La base tiene que ser un número positivo y distinto de la unidad.
- El argumento tiene que ser positivo y distinto de 0.

Ejemplos: a) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un par de propiedades elementales

- El logaritmo de la base siempre vale 1: $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- El logaritmo de 1 en cualquier base siempre vale 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.

Logaritmos inmediatos.

Se llaman así los que se calculan directamente aplicando la definición.

Ejemplos:

- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- $\log 10000 = 4$ porque $10^4 = 10000$.

Cuando no se escribe la base quiere decir que la base es 10. Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales**.
Otros logaritmos no son inmediatos pero se pueden calcular también aplicando la definición, **igualando exponentes**. Esto pasa cuando la base y el argumento son potencias del mismo número.

Ejemplos:

- Para hallar $\log_4 8$ ponemos $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Para hallar $\log_4 32$ ponemos $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

EJERCICIOS RESUELTOS.

- Halla los siguientes logaritmos: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d) $\log 1/100$; e) $\log_3 0{,}111\ldots$.; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; y calcula el valor de x en las siguientes igualdades: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Soluciones:

a) 4, porque $4^4 = 256$; b) –5, porque $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$; c) –1, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$; d) –2, porque $10^{-2} = \frac{1}{100}$;

e) –2, porque 0,111... = 1/9, y entonces $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; f) 1, porque $3^1 = 3$ (el logaritmo de la base siempre vale 1;

g) 0, porque $2^0 = 1$ (el logaritmo de 1 siempre vale 0;
h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \iff 3^x = 3\sqrt{3} \iff 3^x = 3^{3/2} \iff x = 3/2$.
i) $\log_x 16 = 4 \iff x^4 = 16 \iff x^4 = 2^4 \iff x = 2$.

SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

Calcula el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición (sin calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0{,}25$ f) $\log 0{,}001$

Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes (sin calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0{,}125$ e) $\log_3 1/9$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

Halla el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0{,}5 = -1$ e) $\log x = -4$.

k) $\log 0 = x$ no existe solución, porque ninguna potencia da 0 como resultado.

l) $\log(-100) = x$ no existe solución, porque el resultado de calcular una potencia de base positiva siempre es positivo.

- $\log_b 1 = 0$ ya que $b^0 = 1$ (el logaritmo de 1 en cualquier base es 0)
- $\log_b b = 1$ ya que $b^1 = b$ (el logaritmo de la base es 1)
- El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritmo de un **cociente** es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

Ejemplo 1:

- $\log_2 10 + \log_2 3{,}2 = \log_2 (10 \cdot 3{,}2) = \log_2 32 = 5$
- $\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$
- $\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$
- $\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \frac{1}{5} \log_3 9 = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$.

SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

EXPRESIONES LOGARÍTMICAS Y ALGEBRÁICAS.

Las propiedades de los logaritmos se emplean en dos tipos importantes de operación:

- **Tomar logaritmos** en una igualdad es aplicar el logaritmo a ambos miembros de la misma:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmos** en una igualdad es lo contrario: conseguir que una expresión logarítmica deje de serlo. Para esto es necesario que cada miembro tenga un único logaritmo:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

EJEMPLOS.

- Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $2\,log\,x = 2\,log(x-1) + log\,4$

Solución:

Para resolverla es preciso eliminar logaritmos:

$$log\,x^2 = log(x-1)^2 + log\,4 \quad \Rightarrow \quad log\,x^2 = log\,4(x-1)^2$$

La ecuación queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 2/3$.

La segunda solución no es válida porque al sustituirla en la ecuación original quedaría $\log(x-1)$ como logaritmo de un número negativo, que no existe. Esto ocurre a veces en las ecuaciones logarítmicas, igual que en las ecuaciones irracionales, y por ello es necesario comprobar la validez de las soluciones halladas.

- Toma logaritmos y desarrolla:

a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$

b) $a = \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina los logaritmos:

a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$

b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - 3 \log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log \sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2 \log b - \frac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1000a) = \log \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}} \Rightarrow 1000a = \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

GRÁFICAS Y CARACTERÍSTICAS.

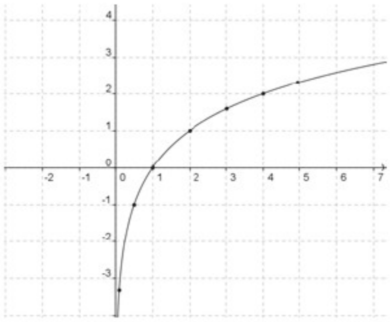
Las funciones logarítmicas son las del tipo $y = log_b\, x$.

Hay una función distinta para cada valor de la base b.

Ejemplos:

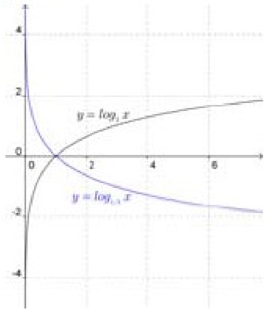
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

x	$\log_2 x$
0,1	-3,3
0,5	-1,0
0,7	-0,5
1	0,0
2	1,0
3	1,6
4	2,0
5	2,3
...	...



Las características de estas gráficas nos permiten deducir las de las funciones logarítmicas en general, que son las siguientes:

- Su **dominio** es $(0, +\infty)$. Es decir, solo están definidas para "x" positivo.
- Son continuas.
- Su **recorrido** es toda la recta real.
- Pasan por los puntos $(1, 0)$, $(b, 1)$ y $(1/b, -1)$.
- La gráfica de $y = log_b\, x$ y la de $y = log_{1/b}\, x$ son simétricas respecto del eje OX.



Por otra parte observamos unas características propias en las funciones en ambas ilustraciones, según sea la base del logaritmo mayor o menor que la unidad.

Cuando la base es $b > 1$:

- Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $-\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte negativa del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

Cuando la base es $0 < b < 1$:

- Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $+\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte positiva del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.

Según la definición del logaritmo tenemos la siguiente relación: $y = log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$

Las funciones logarítmica y exponencial llevan intercambiado el lugar de la "x" y la "y". Por tanto son **funciones inversas**.

En consecuencia, si partimos de un número y le aplicamos la función logarítmica, y luego al resultado le aplicamos la función exponencial volvemos al número de partida. Lo mismo ocurre si primero aplicamos la función exponencial y después la logarítmica.

Ejemplo:

- Partiendo del número 3, utilizando la calculadora aplicamos una función logarítmica: $\log_5 3 = 0{,}6826$ (recuerda la fórmula de cambio de base). A continuación aplicamos la función exponencial: $5^{0{,}6826} = 3$ y obtenemos el número del principio.
- Haciéndolo en sentido inverso, partiendo del número 3 aplicamos primero una función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación aplicamos la función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ y también hemos obtenido el número del principio.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

> **Recuerda que:**
> Un radian se define como la medida del ángulo central cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Por tanto:
> 360º equivalen a 2π radianes
> De donde se deduce que:
> 180º equivalen a π radianes
> 90º equivalen a π/2 radianes …

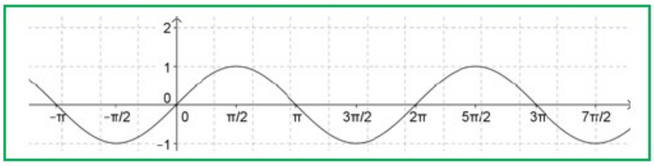
FUNCIONES SENO Y COSENO.

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

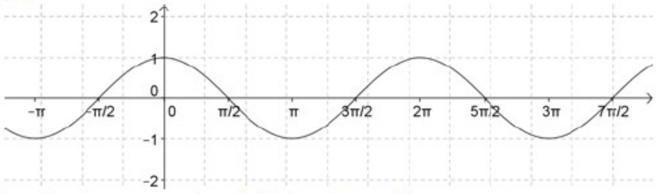
Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

Gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\ x$



Gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Ya sabes cuánto vale π, π = 3,14…. Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.

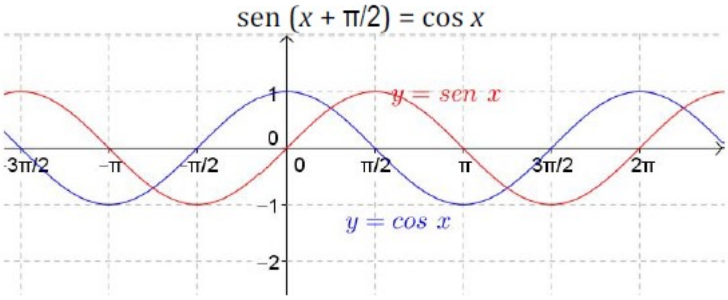
Propiedades de estas funciones:

- Ambas son periódicas y el valor de su período es 2π.

  $$sen\ (x + 2\pi) = sen\ x \qquad\qquad cos\ (x + 2\pi) = cos\ x$$

- Son funciones continuas en todo su dominio.
- Su dominio son todos los números reales.
- Su recorrido es el intervalo [–1 , 1].
- La función seno tiene simetría impar (simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, $sen\ x = -sen\ (-x)$) y la función coseno tiene simetría par (simétrica respecto del eje OY, es decir, $cos\ x = cos\ (-x)$).
- Ambas funciones tienen la misma gráfica pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido horizontal. Es decir:

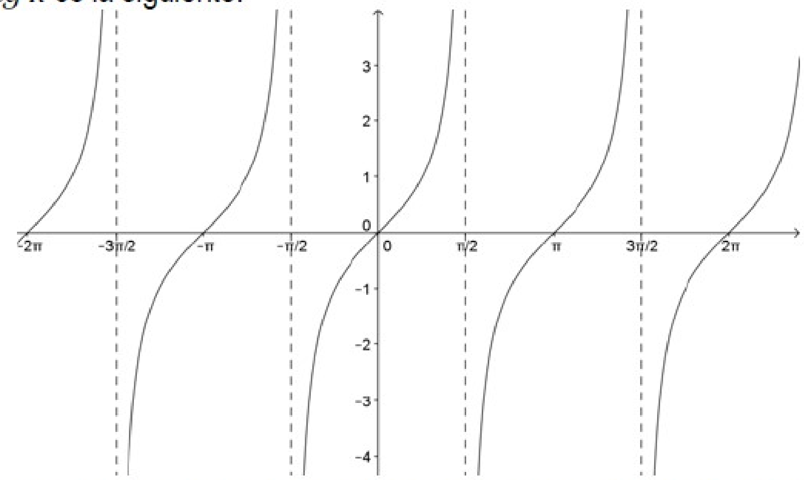
$$\text{sen}\ (x + \pi/2) = \cos x$$



SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

LA FUNCIÓN TANGENTE.

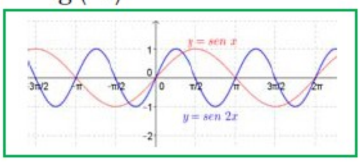
Esta función es diferente a las otras dos. Por esa razón la presentamos separadamente.
Ya sabes que como razones trigonométricas: tg x = sen x/ cos x.
La gráfica de la función $f(x) = tg\ x$ es la siguiente:



Recordamos en primer lugar que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.
Las propiedades de esta función son las siguientes:

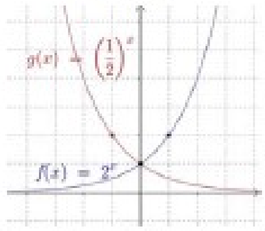
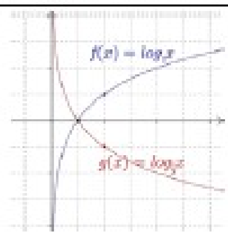
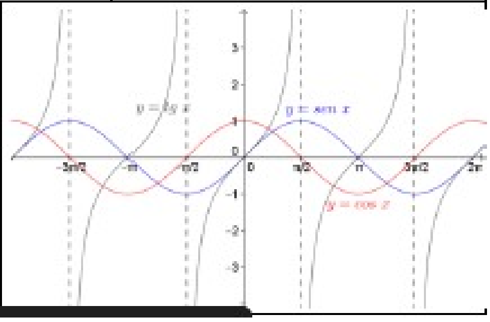
Las propiedades de esta función son las siguientes:

- Es una función periódica y el valor de su período es ahora menor, es π: tg (x+ π) = tg x.
- Su dominio son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), donde no existe. En esos valores presenta discontinuidades llamadas discontinuidades *inevitables*, porque no se podrían "taponar" mediante un punto.
- Tiene asíntotas verticales en esos mismos valores de la x. Las hemos representado en el gráfico mediante líneas discontinuas.
- Tiene simetría impar: es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que tg (x) = – tg (–x)



SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

RESUMEN

		Ejemplos
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos los números reales. Recorrido: Todos los números reales positivos. Continua en todo el dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1$, $\Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1$ $\Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: (0 , 1), (1 , b), (–1 , 1/b)	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$ Consecuencias elementales: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \dfrac{\log 7}{\log 4} = 1{,}40$
Operaciones con logaritmos	Log. de un producto: $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ Log. de un cociente: $\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$ Log. de una potencia: $\log_b x^y = y \cdot \log_b x$	$\log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio:* T Todos los números reales positivos. *Recorrido:* Todos los números reales. Continua en todo el dominio Asíntota vertical: $x=0$ $b > 1$ $\Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1$ $\Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: (1 , 0), (b , 1), (1/b , –1)	
Funciones trigonométricas y = sen x y = cos x y = tg x	**Funciones seno y coseno:** *Dominio:* Todos los números reales. *Recorrido:* [–1 , 1] Continuas en todo el dominio. Periódicas de período 2π **Función tangente:** *Dominio y continuidad:* Todo $\Re$ salvo $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En esos valores hay asíntotas verticales) *Recorrido:* Todos los números reales. Periódica de periodo π. **Simetría:** Funciones seno y tangente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

SESIÓN 12.
ADMINISTRACIÓN.
ING. MIGUEL MERLOS.

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de x que verifica la ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ es: a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. La función exponencial $y = e^x$ tiende a *** cuando x tiende a $-\infty$ y a *** cuando x tiende a $+\infty$. Indica con qué valores habría que rellenar los asteriscos: a) $0, +\infty$ b) $+\infty, 0$ c) $0, -\infty$ d) $-\infty, 0$
3. Indica cuál es la función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$: a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$
4. El valor de x que verifica $x = \log_2 1024$ es: a) 0 b) 5 c) 10 d) Otro valor
5. La ecuación logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ tiene como solución: a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
6. Indica la afirmación verdadera:
   a) La función exponencial de base mayor que 1 es decreciente b) La función logarítmica de base mayor que 1 es decreciente
   c) La función exponencial siempre es creciente d) La función exponencial de base mayor que 1 es creciente
7. La expresión general de todos los ángulos cuya tangente vale 1, donde k es un número entero, es:
   a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
8. La función $f(x) = 3\,sen(4x)$ tiene de amplitud, periodo y frecuencia, respectivamente:
   a) 3, π/2, 2/π b) 4, π/3, 3/π c) 4, 3/π, π/3 d) 3, 2/π, π/2
9. El seno, el coseno y la tangente de –7π/4 valen respectivamente:
   a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$
10. El seno, el coseno y la tangente de 13π/6 valen respectivamente:
    a) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1$