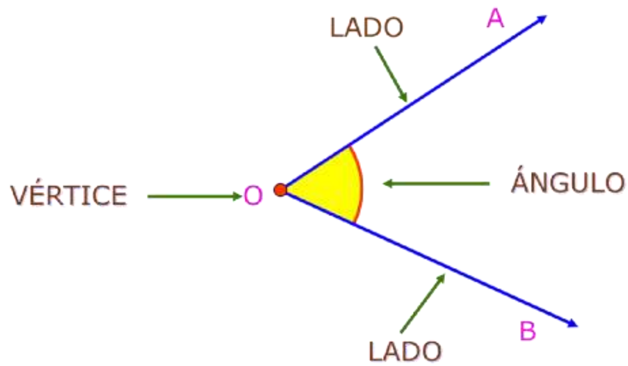
Ángulos

Se conoce por el nombre de “vértice” a aquel lugar exacto en el que se interceptan las rectas o semirrectas que conforman uno o más ángulos.



Gracias a las prolongaciones de las rectas que componen se forma el ángulo. Este se encuentra del otro lado del vértice.

Medición de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el grado sexagesimal (°)

El Grado sexagesimal es la amplitud del ángulo resultante de dividir la circunferencia en 360 partes iguales.

$$1°=60'=3600''$$

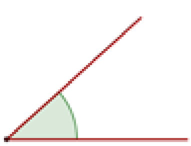
$$1'=60''$$

Otra medida utilidad es el radián (rad), la cual es la medida del ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco coincide con la longitud de su radio.

$$1\ rad=57°\ 17'44.8''\ \text{ ó }\ 360°=2\pi\ rad$$

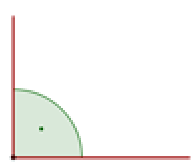
Clasificación de ángulos según su medida

Ángulo agudo



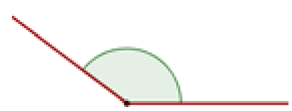
Mide menos de 90°.

Ángulo recto (perpendicular)



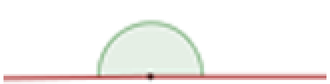
Mide 90°.

Ángulo obtuso



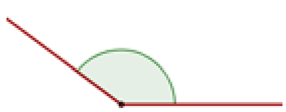
Mide más de 90°.

Ángulo llano



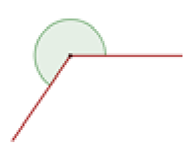
Mide 180°.

Ángulo convexo



Mide entre 0 y 180°.

Ángulo cóncavo

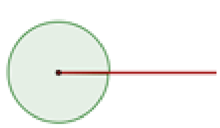


Mide entre 180 y 360°.

Ángulo nulo

Mide 0°

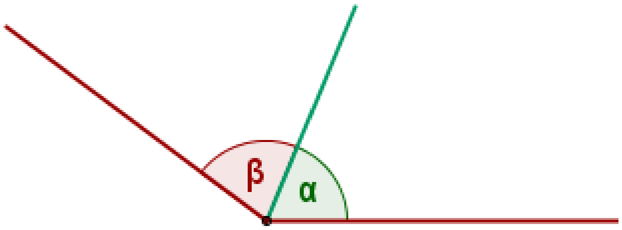
Ángulo completo



Mide 360°.

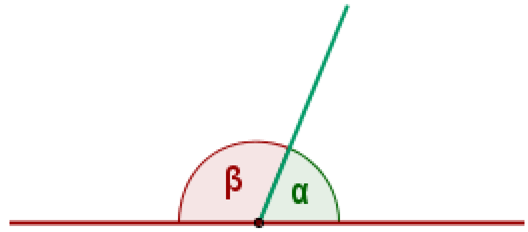
Clasificación de ángulos según su posición

Ángulos consecutivos



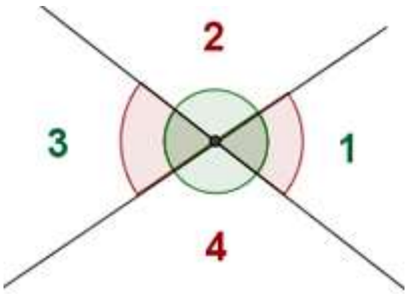
Son aquellos que tienen el vértice y un lado común.

Ángulos adyacentes



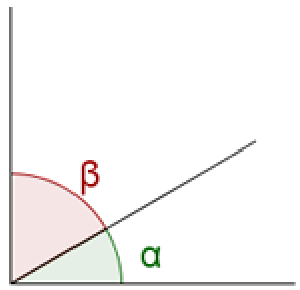
Son aquellos que tienen el vértice y un lado común,
y los otros lados situados uno en prolongación del otro.

Ángulos opuestos por el vértice



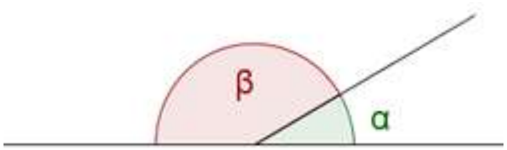
Son los que, teniendo el vértice común, los lados de uno son prolongación de los lados del otro.

Ángulos complementarios



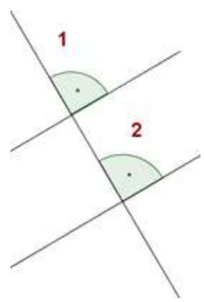
Dos ángulos son complementarios si suman 90°

Ángulos suplementarios

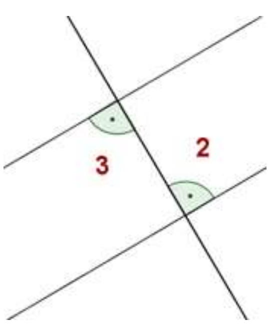


Dos ángulos son suplementarios si suman 180°.

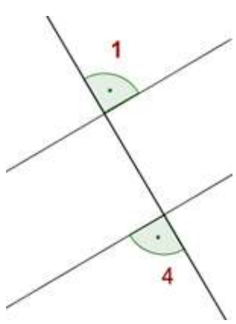
Ángulos correspondientes



Ángulos alternos internos

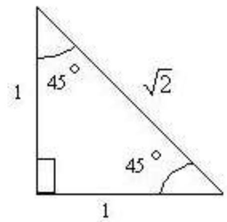


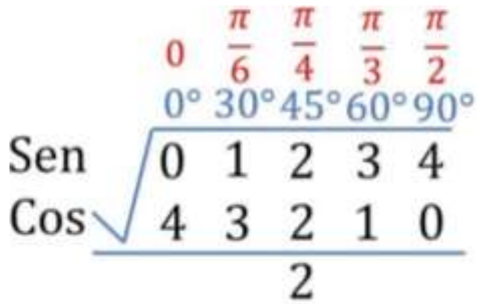
Ángulos alternos externos

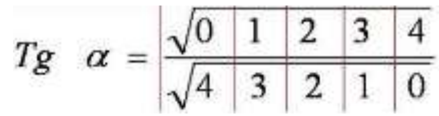


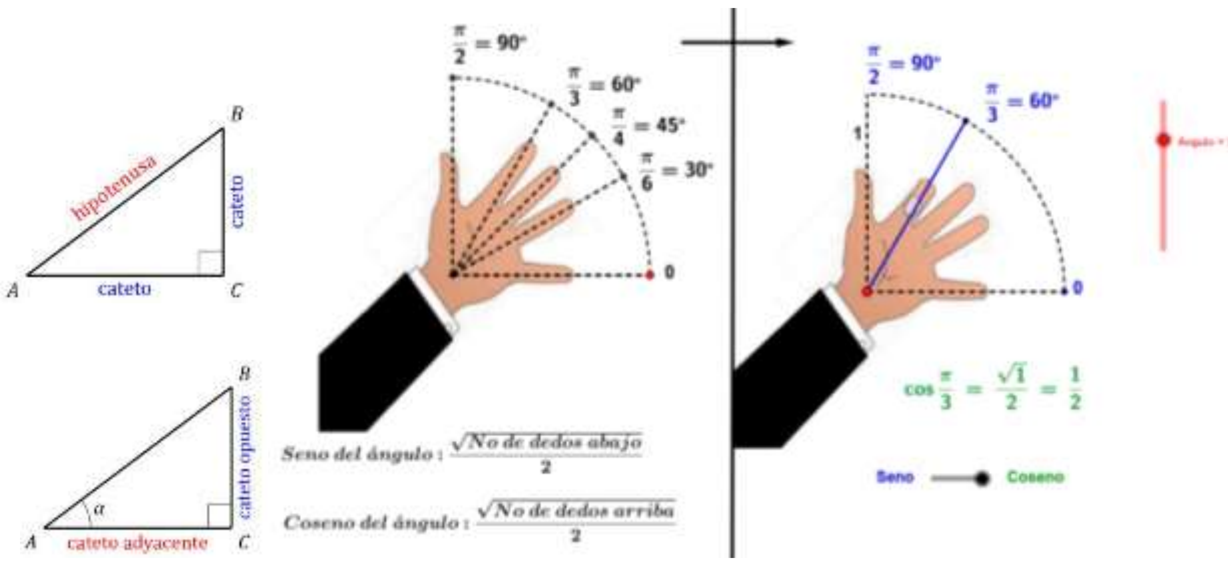
Ángulos notables

Son ángulos que guardan una relación directa con los triángulos rectángulos, cuyas funciones trigonométricas se pueden conseguir de forma inmediata, es decir, sin tener que realizar ningún cálculo previo.









$$\sin 60^\circ = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc 60^\circ = \frac{r}{y} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^\circ = \frac{r}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\tan 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{x}{y} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

El valor de las razones trigonométricas de este tipo de ángulos negativos u opuestos es el mismo, lo único que varía es el signo, es decir:

- El seno de los ángulos negativos es el mismo que el de los ángulos positivos lo único que cambia es el signo de este.
- El coseno de los ángulos negativos es el mismo que el de los ángulos positivos lo único que cambia es el signo de este.
- La tangente de los ángulos negativos la misma que la de los ángulos positivos lo único que cambia es el signo de esta.

Valores Notables de las Funciones Trigonométricas

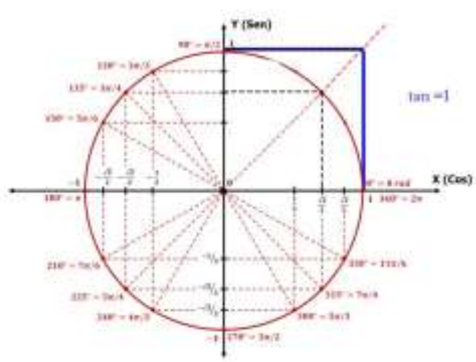
"α" Radianes	"α" Grados	Sen α	Cos α	Tan α	Cot α	Sec α	Csc α
0	0°	0	1	0	indeterminado	1	indeterminado
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	indeterminado	0	indeterminado	1
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
π	180°	0	-1	0	indeterminado	-1	indeterminado
$\frac{7\pi}{6}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	indeterminado	0	indeterminado	-1
$\frac{10\pi}{6}$	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2

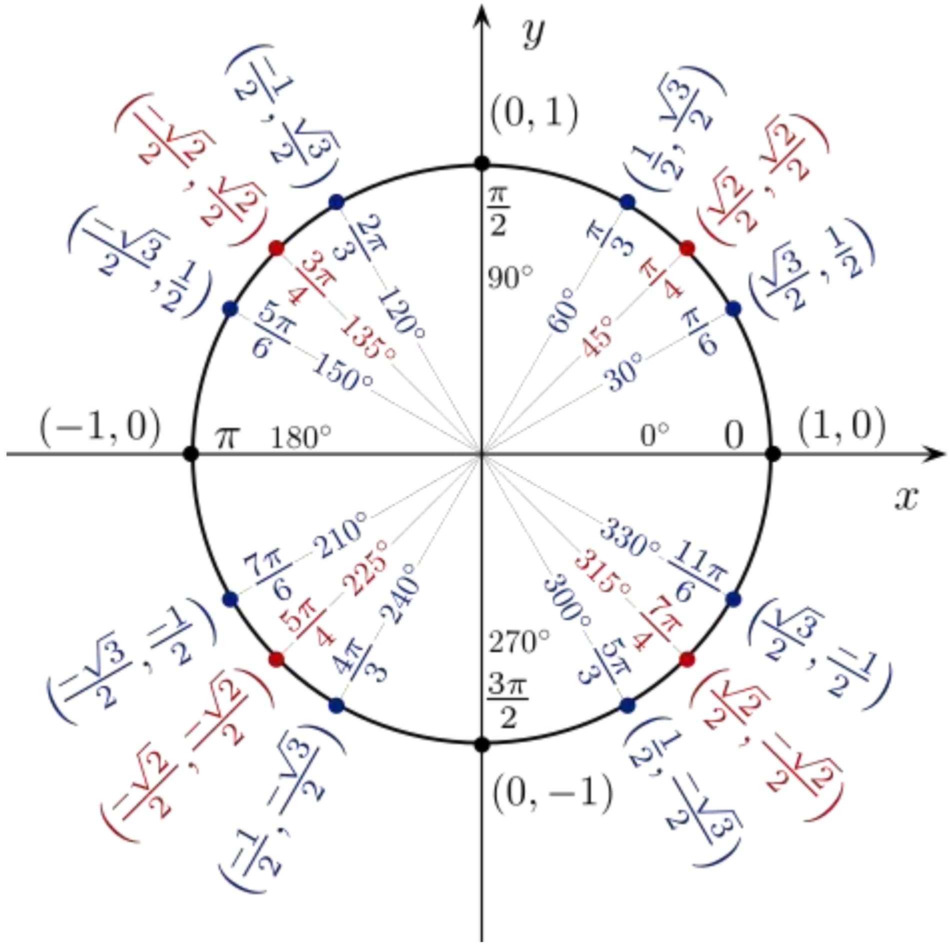
	Sen	Cos	Tan	Cotan	Sec	Cosec
8°	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	1/7	7	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$	$5\sqrt{2}$
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
16°	7/25	24/25	7/24	24/7	25/24	25/7
30°	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
37°	3/5	4/5	3/4	4/3	5/4	5/3
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
53°	4/5	3/5	4/3	3/4	5/3	5/4
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
74°	24/25	7/25	24/7	7/24	25/7	25/24
75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
82°	$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	7	1/7	$5\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{7}$

5°	10°	15°	16°	20°	25°	30°	35°	40°	45	50°	55	60°	65°	70°	75°	80	85
$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{45}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{36}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{36}$
90	95	100	105	110	115	120	130	135	140	150	210	225	240	270	300	315	330
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{36}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{18}$	$\frac{23\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

Círculo unitario

La tabla conocida como círculo unitario, la cual contiene los valores de los radios más representativos usados en la trigonométrica, además, el nombre de este círculo se debe a que es un círculo con radio 1.





Con esta herramienta será muy sencillo localizar el valor de los ángulos, por ejemplo, si quisiéramos conocer el valor de x= sen (-1) , simplemente debemos ubicarnos en el eje del seno, es decir, el eje y, y luego ubicarnos en el valor -1 .

Notaremos que la tabla indica que el ángulo es 270° lo cual es el valor en grados, pero también existe el valor en radianes, el cual es 3π/2.

Identidades trigonométricas básicas.

$$sen\theta \cdot csc\theta = 1 \rightarrow sen\theta = \frac{1}{csc\theta}, \quad csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$$cos\theta \cdot sec\theta = 1 \rightarrow cos\theta = \frac{1}{sec\theta}, \quad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$

$$tan\theta \cdot cot\theta = 1 \rightarrow tan\theta = \frac{1}{cot\theta}, \quad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$$

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Identidades trigonométricas pitagóricas.

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta \rightarrow sen\theta = \pm\sqrt{1 - cos^2\theta}$$

$$cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \rightarrow cos\theta = \pm\sqrt{1 - sen^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta \rightarrow tan^2\theta = sec^2\theta - 1$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta \rightarrow cot^2\theta = csc^2\theta - 1$$

Identidades trigonométricas pares e impares

Funciones Pares: $cos(-\theta) = cos\theta$ $\quad$ $sec(-\theta) = sec\theta$

Funciones Impares: $sen(-\theta) = -sen\theta$ $\quad$ $csc(-\theta) = -csc\theta$ $\quad$ $tan(-\theta) = -tan\theta$ $\quad$ $cot(-\theta) = -cot\theta$

Ángulos dobles

$$sen(2\theta) = 2 \cdot sen\theta \cdot cos\theta$$

$$cos(2\theta) = \begin{cases} cos^2\theta - sen^2\theta \\ 1 - 2sen^2\theta \\ 2cos^2\theta - 1 \end{cases}$$

$$tan(2\theta) = \frac{2 \cdot tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

Ángulos medios

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}}$$

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\theta}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{1 + cos\theta}} = \frac{1 - cos\theta}{sen\theta} = \frac{sen\theta}{1 + cos\theta}$$

Suma y resta de ángulos

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta \pm sen\beta \cdot cos\alpha$$

$$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta \mp sen\alpha \cdot sen\beta$$

$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha \cdot tan\beta}$$

Relaciones producto-suma

$$sen\alpha \cdot sen\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)]$$

$$cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)]$$

$$sen\alpha \cdot cos\beta = \frac{1}{2}[sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta)]$$

$$sen\alpha + sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2 \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2 \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2 \cdot sen\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$