

Profesor Miguel Merlos.

Sesión 15.

Teorema de Bayes.

Probabilidad y Estadística.

Teorema de Bayes.

INTRODUCCIÓN.

El teorema de Bayes es utilizado para calcular la probabilidad de un suceso, teniendo información de antemano sobre ese suceso.

Podemos calcular la probabilidad de un suceso A, sabiendo además que ese A cumple cierta característica que condiciona su probabilidad. El teorema de Bayes entiende la probabilidad de forma inversa al teorema de la probabilidad total. El teorema de la probabilidad total hace inferencia sobre un suceso B, a partir de los resultados de los sucesos A. Por su parte, Bayes calcula la probabilidad de A condicionado a B.

El teorema de Bayes ha sido muy cuestionado. Lo cual se ha debido, principalmente, a su mala aplicación. Ya que, mientras se cumplan los supuestos de sucesos disjuntos y exhaustivos, el teorema es totalmente válido.

Fórmula del teorema de Bayes.

Para calcular la probabilidad tal como la definió Bayes en este tipo de sucesos, necesitamos una fórmula. La fórmula se define matemáticamente como:

$$P[A_n/B] = \frac{P[B/A_n] \cdot P[A_n]}{\sum P[B/A_i] \cdot P[A_i]}$$

Donde B es el suceso sobre el que tenemos información previa y A(n) son los distintos sucesos condicionados. En la parte del numerador tenemos la probabilidad condicionada, y en la parte de abajo la probabilidad total. En cualquier caso, aunque la fórmula parezca un poco abstracta, es muy sencilla. Para demostrarlo, utilizaremos un ejemplo en el que en lugar de A(1), A(2) y A(3), utilizaremos directamente A, B y C.

Ejemplo del teorema de Bayes.

Una empresa tiene una fábrica en Estados Unidos que dispone de tres máquinas A, B y C, que producen envases para botellas de agua. Se sabe que la máquina A produce un 40% de la cantidad total, la máquina B un 30% , y la máquina C un 30%. También se sabe que cada máquina produce envases defectuosos. De tal manera que la máquina A produce un 2% de envases defectuosos sobre el total de su producción, la máquina B un 3%, y la máquina C un 5%. Dicho esto, se plantean dos cuestiones:

$$P(A) = 0,40 \quad P(D/A) = 0,02$$

$$P(B) = 0,30 \quad P(D/B) = 0,03$$

$$P(C) = 0,30 \quad P(D/C) = 0,05$$

1. Si un envase ha sido fabricado por la fábrica de esta empresa en Estados Unidos
¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Se calcula la probabilidad total. Ya que, a partir los diferentes sucesos, calculamos la probabilidad de que sea defectuoso.

$$P(D) = [P(A) \times P(D/A)] + [P(B) \times P(D/B)] + [P(C) \times P(D/C)] = [0,4 \times 0,02] + [0,3 \times 0,03] + [0,3 \times 0,05] = 0,032$$

Expresado en porcentaje, diríamos que la probabilidad de que un envase fabricado por la fábrica de esta empresa en Estados Unidos sea defectuoso es del 3,2%.

2. Siguiendo con la pregunta anterior, si se adquiere un envase y este es defectuoso
¿Cuáles es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A? ¿Y por la máquina B? ¿Y por la máquina C?

Aquí se utiliza el teorema de Bayes. Tenemos información previa, es decir, sabemos que el envase es defectuoso. Claro que, sabiendo que es defectuoso, queremos saber cual es la probabilidad de que se haya producido por una de las máquinas.

$$P(A/D) = [P(A) \times P(D/A)] / P(D) = [0,40 \times 0,02] / 0,032 = 0,25$$

$$P(B/D) = [P(B) \times P(D/B)] / P(D) = [0,30 \times 0,03] / 0,032 = 0,28$$

$$P(C/D) = [P(C) \times P(D/C)] / P(D) = [0,30 \times 0,05] / 0,032 = 0,47$$

Profesor Miguel Merlos.

Sesión 15.

Teorema de Bayes.

Sabiendo que un envase es defectuoso, la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A es del 25%, de que haya sido producido por la máquina B es del 28% y de que haya sido producido por la máquina C es del 47%