Clase 2. Álgebra vectorial

2.1. Magnitudes vectoriales y escalares.
2.2. Propiedades de los vectores
2.3. Vectores unitarios
2.4. Sistemas de vectores
2.5. Suma de vectores por métodos gráficos y analíticos
2.6. Producto de un escalar por un vector, producto escalar y vectorial de vectores

Algebra Vectorial.

Se encargada de estudiar sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices, espacios vectoriales y sus transformaciones lineales.

Su relación es directa con las áreas de ingeniería, para resolver ecuaciones diferenciales, análisis funcional, investigación de operaciones, gráficas computacionales, entre otras. En física utilizamos principalmente para ayudar a describir fenómenos físicos, como el tiro parabólico, los sólidos de revolución y otros fenómenos que ayuden a describir el movimiento de un objeto en el espacio.

Magnitudes vectoriales y escalares.

Las magnitudes que empleamos en Física son de dos tipos: escalares y vectoriales.

Una magnitud escalar es aquella que queda completamente determinada con un número y sus correspondientes unidades, y una magnitud vectorial es aquella que, además de un valor numérico y sus unidades (módulo) debemos especificar su dirección y sentido.

Magnitud escalar	Magnitud vectorial
a) Tiempo: 3 segundos.	a) Velocidad: 10 m/s. (sobre el eje horizontal)
b) Masa: 100 g.	b) Aceleración: 13 m /s^2; S 20° Oeste.
c) Volumen: 4 l.	c) Fuerza: 280 N, 120°.
d) Temperatura: 40 °C.	d) Presión: -40 ĵ 150 Pa.

Propiedades de los vectores.

Para la escritura de vectores se utiliza la notación adoptada por la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (U.I.F.P.A.), representando estas magnitudes vectoriales por letras negritas, por ejemplo; **V** (en negrita); y la representación de su módulo por la correspondiente letra cursiva *v* o bien la notación |V|. Cuando definamos el vector por su origen (O) y extremo (O’’) convendremos en representarlo así: O’’ o también mediante la diferencia simbólica O’- O. Sin embargo, en las figuras optamos por representarlos como normalmente se hace en un manuscrito o en la pizarra del aula, es decir, con la flecha indicativa de vector sobre la letra que representa a la magnitud vectorial correspondiente ($\vec{v}$ ó $\hat{v}$).

Sistema de Coordenadas.

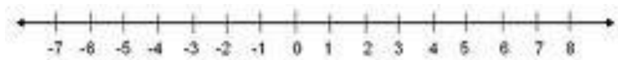
Cuando hablamos de vectores, como se mencionó se requiere especificar una dirección y sentido, por lo que debemos recurrir a la geometría, para establecer un sistema de coordenadas de referencia para determinar la posición de un punto u objeto geométrico dentro del espacio.

Sistema coordenado lineal.

Es el conjunto de números reales (**R**) representado gráficamente por una recta en el que se pueden ubicar todos los números naturales, enteros, fraccionarios, decimales, etc.

Números racionales: -3/ 4, 5/8, 31/7
Número enteros: -7, -2, 0, 8, 100 etc.
Números irracionales: $\sqrt{2}, \left(1+\sqrt{11}\,\right), \sqrt[3]{8}/_{2}$
Números trascendentales: e, ln (2) y π

Cada punto de la recta representa un número real. el punto que representa al cero (0) es el punto de referencia principal del sistema de coordenadas, llamado punto de origen.



Tomando en cuenta que cada uno de los puntos de la recta representa gráficamente un número real, a la derecha del punto origen O se hallan todos los positivos y a la izquierda todos los números reales negativos. También es conocido como sistema de coordenada ortogonal.

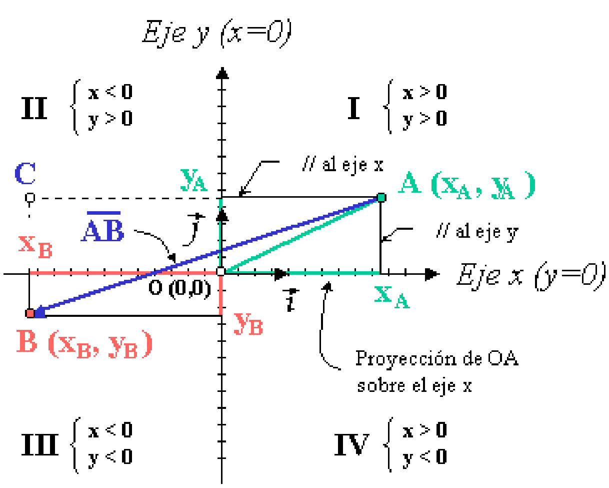
Sistema de coordenadas cartesianas

Es un sistema coordenadas definido dos o tres ejes ***ortogonales*** que cumplen con las reglas del ***espacio euclídeo*** un sistema

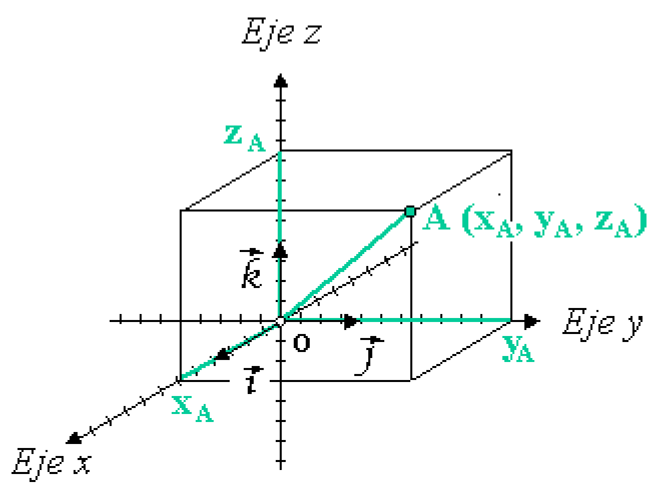
[Ortogonal es sinónimo de que las rectas son perpendiculares (se encuentran en un ángulo de 90°)].

[Espacio euclídeo, es un tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría. Los axiomas básicos de la geometría clásica].

Las coordenadas cartesianas se identifican por usar los planos “x” , “y” y “z” como símbolos de referencia respecto al eje donde se encuentren: un solo eje (línea recta “x”), respecto a dos ejes (un plano “x” “y”) o respecto a tres ejes (en el espacio “x” “y” “z”).



Sistema de Coordenadas de un Plano



Sistema de Coordenadas Espaciales.

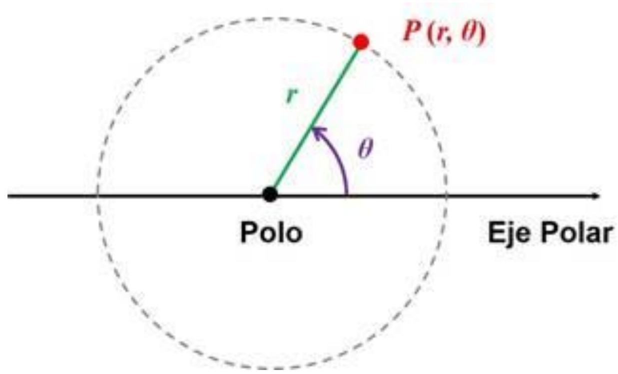
Sistema de coordenadas polares

Este sistema de coordenadas es bidimensional se establece que por medio de una distancia y un ángulo.

La forma de determinar un punto del plano se describe mediante dos números:

r, distancia del punto al extremo de la semirrecta (equivalente al eje x del sistema cartesiano).

Θ, llamado polo, el ángulo que forma el eje polar (que es horizontal) con el segmento que une el punto con el polo, este ángulo debe medirse en sentido opuesto a las manecillas del reloj.



Lo anterior significa que a todo punto del plano cuyas coordenadas rectangulares son (r, θ) se le puede asignar las siguientes coordenadas:

r = distancia del origen de coordenadas al punto P.

Θ = ángulo desde el semieje positivo del eje x al segmento que une el origen de coordenadas con P.

De cierta manera se puede hacer analogía de coordenadas entre las polares y las cartesianas.

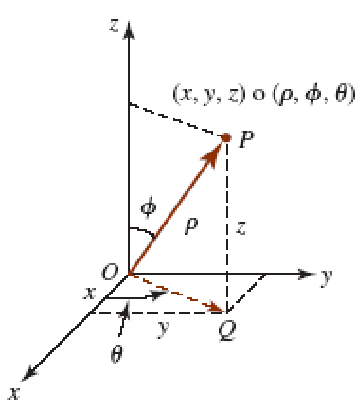
$$\text{De rectangulares a polares: } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

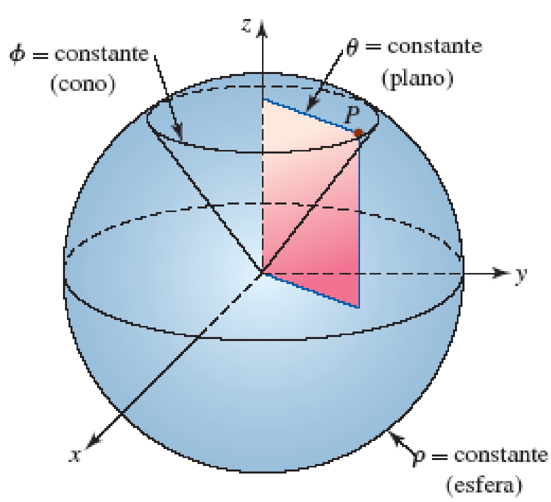
$$\text{De polares a rectangulares: } \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Sistema de coordenadas esféricas

Tiene similitud a las coordenadas polares, pero, trabaja mediante una distancia y dos ángulos, siendo de este modo análogo al sistema de tres ejes (espacial) del sistema cartesiano.

En consecuencia, un punto P queda representado por un conjunto de tres magnitudes: el radio ***r***, el ángulo polar o colatitud ó latitud **θ** y el azimutal **ϕ**.





Convenio internacional

La mayoría de los físicos, ingenieros y matemáticos están de acuerdo de que:

ϕ, el azimutal: de 0° a 360° (0 a 2π en radianes) o de -180° a +180° (-π a π).

θ, la colatitud: de 0° a 180° ó -90° a 90° (de -π/2 a π/2 radianes),

De igual modo con las coordenadas polares, existe una relación que permite correspondencia entre las cartesianas y las esféricas.

De coordenadas esféricas a cartesianas

$$x = r\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \qquad y = r\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

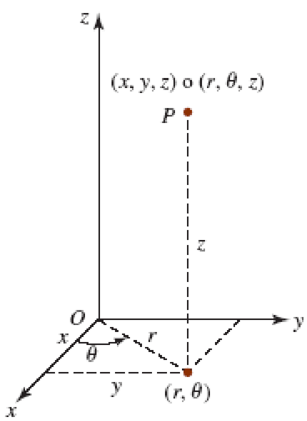
De coordenadas cartesianas a esféricas

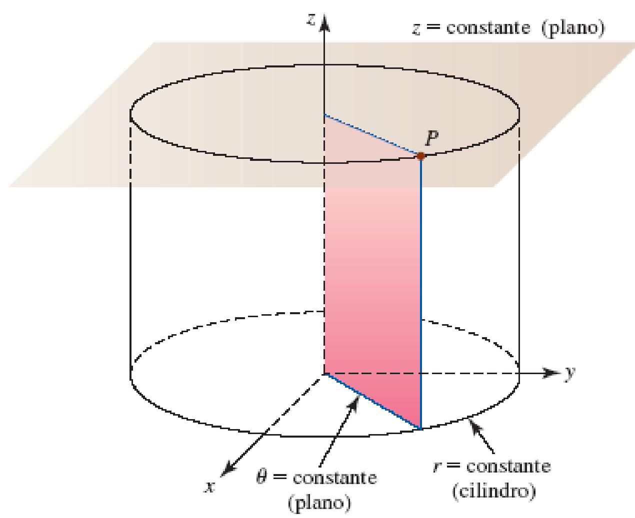
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sistema de coordenadas cilíndricas

El sistema de coordenadas cilíndricas es recurrente cuando se tratan de problemas que tienen simetría de tipo cilíndrico o azimutal. Se puede decir, que es una versión de tres dimensiones de las coordenadas polares de la geometría analítica plana.

En consecuencia, un punto P queda representado por un conjunto de tres magnitudes: el radio ***r ó ρ***, el ángulo azimutal **θ ó ϕ** y la coordenada **z**.





La coordenada azimutal **ϕ** varía desde -π hasta π. La coordenada radial es siempre positiva (0 hasta ∞). El valor de ***z*** comprende de -∞ hasta ∞.

Relación con las coordenadas cartesianas.

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores para las coordenadas polares, obtenemos las siguientes relaciones. Dada la coordenada cilíndrica (r, ϕ, z) su equivalente cartesiano (x, y, z) vendría dado por la relación:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z$$

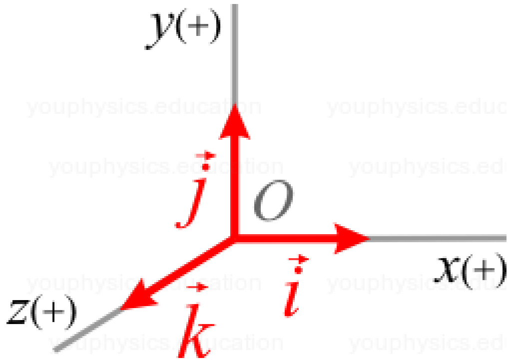
A la inversa, para convertir de cartesiano a cilíndrico basta con resolver:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \varphi = \tan^{-1}(^{y}/_{x}) \quad \text{z=z}$$

Vectores unitarios.

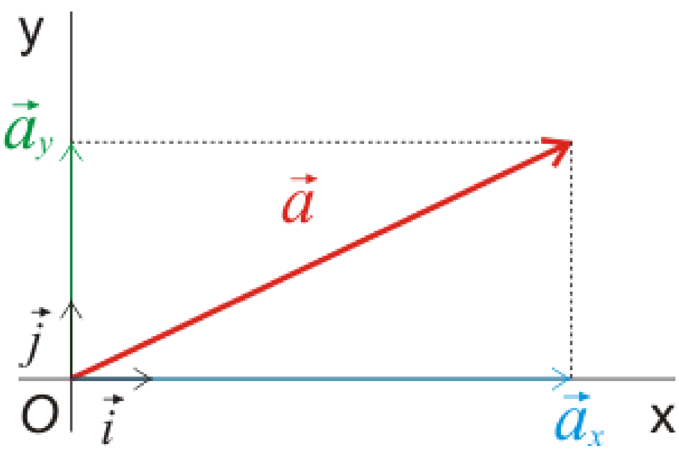
Vector se define como un punto de aplicación, que contiene dirección, sentido y magnitud Se dice que un vector es unitario cuando su módulo = 1. También se les da el nombre de vector normalizado. cómo calcularlo y ejercicios.

Un vector unitario puede emplearse para definir el sentido positivo de cualquier eje. Así, para los ejes cartesianos x,y,z se emplean los vectores i, j y k



Vectores constituyentes de un vector.

Una vez introducidos los vectores unitarios i, j, k que definen los sentidos positivos de los ejes cartesianos, podemos expresar cualquier vector como la suma de los siguientes vectores:



Componentes cartesianas (dos dimensiones)

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

Componentes espaciales (tres dimensiones)

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Normalizar un vector.

Consiste en tomar a un vector $\vec{v}$ distinto de cero, y con él obtener un vector $\vec{u}$ de la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ pero con magnitud uno. De esta manera se obtiene el valor del módulo de un vector, para lo cual se ocupa el teorema de Pitágoras. Esto se debe a que se considera que la distancia escalar del vector equivale a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, siendo que este triángulo tiene a su vez como catetos los componentes del vector.

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} \quad y \ el \ módulo \ es: \ |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Sistemas de vectores

Al conjunto de vectores que actúan sobre un cuerpo en forma simultánea, se le llama sistema vectorial, y cada uno de los vectores que lo forman reciben el nombre de vector componente. Todos los vectores componentes se pueden subdividir por un vector único que cause el mismo efecto, al cual se le llama vector suma o vector resultante.

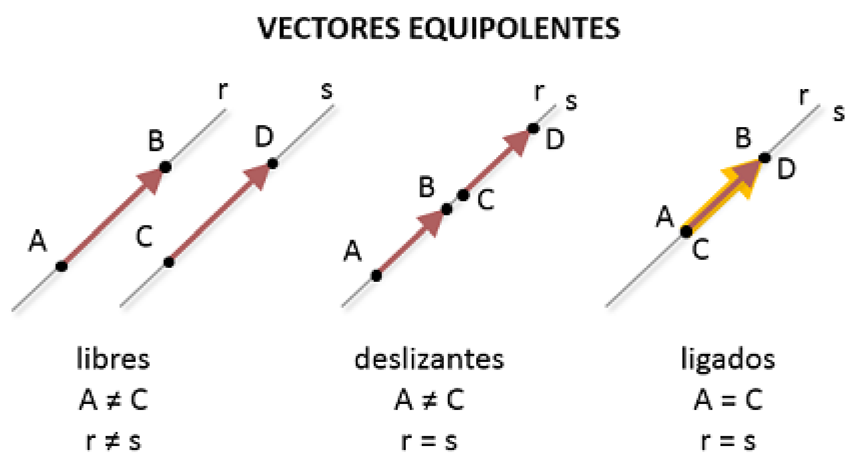
Según convenga para el propósito particular, se usan vectores de distintos tipos:

Vectores Equipolentes (igual dirección, sentido y módulo). Recta directriz (r=s), también llamados Sistema de vectores colineales.

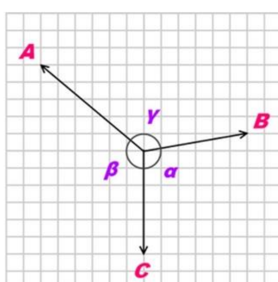
Vector deslizante. Puede considerarse en cualquier posición dentro de una recta ("recta de acción"). Dos vectores de igual módulo y sentido sobre la misma recta son el mismo vector deslizante.

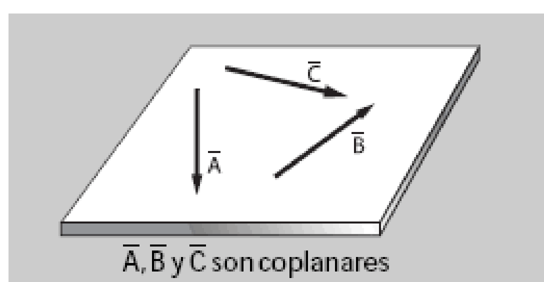
Vector ligado. Está asociado a un determinado punto del espacio (punto de aplicación).

Vector libre. no se considera asociado a ningún punto ni recta particular.

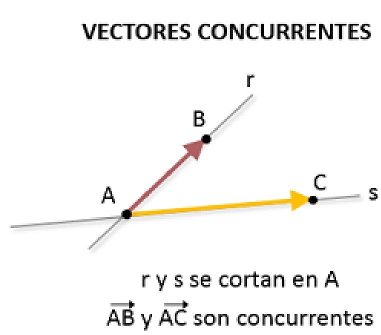


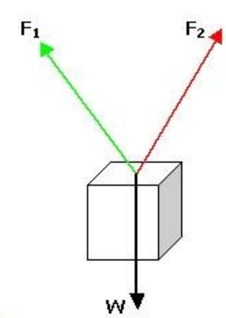
Vectores coplanares: son los que están en un mismo plano, cualquier vector puede verse como la suma de múltiplos de cualquier otro par no colineal de vectores.





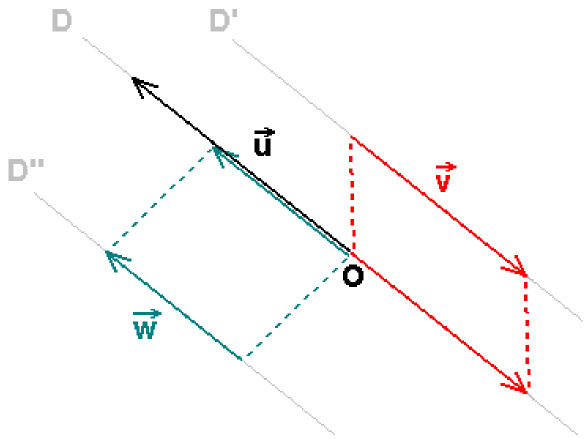
Vectores Concurrentes. Son aquellos que parten de un mismo punto de aplicación.

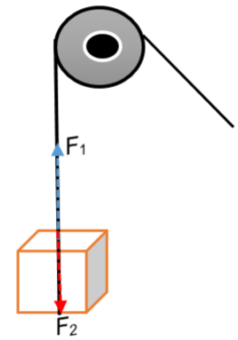




Vectores Colineales

Actúan en una misma línea de acción, pero pueden no actuar en el mismo sentido, pueden representar a la fuerza de tensión en un sentido y al punto donde se afina la cuerda, la cual será otra fuerza en sentido contrario.





Vectores Colineales

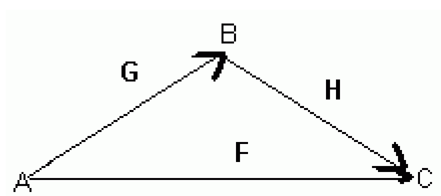
Las operaciones más comunes con vectores son las siguientes:

- Adición de vectores.
- Producto de un vector por un escalar.
- Producto escalar de dos vectores.
- Producto vectorial de dos vectores.

Suma de vectores por métodos gráficos y analíticos

Adicción y sustracción de vectores. Gráfico

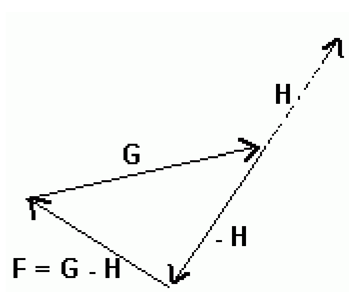
La suma o sustracción de dos vectores o más vectores, puede ser representado por el vector que une el extremo A con la punta de C,



$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (suma) es igual a, $\overline{AC}$

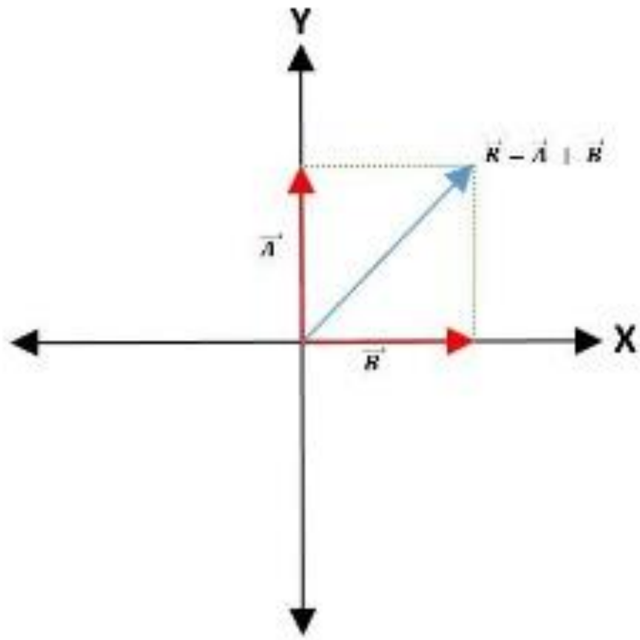
Vectorialmente lo expresaremos: F = G + H. El vector F podría ser, por ejemplo, la resultante de dos fuerzas que tienen distinta dirección.

Para la diferencia entre dos vectores, G - H, es equivalente a la suma de G + (-H), es decir, hacer la suma del vector G con el opuesto de H, representado como -H. Tal como se puede apreciar en la siguiente figura.



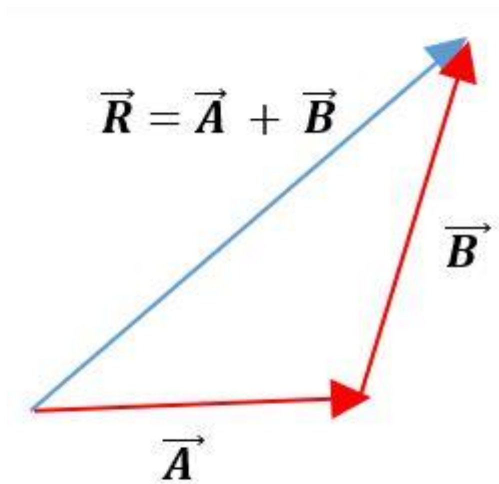
Método del paralelogramo

Para hacer la suma o resta de dos vectores se elige un punto en común sobre el eje de coordenadas —que representará el punto de origen de los vectores—, manteniendo su módulo, sentido y dirección.



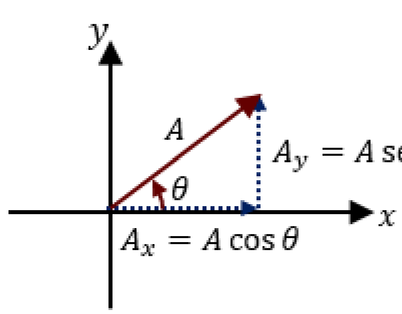
Método del triángulo

En este método los vectores se colocan uno a continuación el otro, manteniendo sus módulos, sentidos y direcciones. El vector resultante será la unión del origen del primer vector con el extremo del segundo vector:



Adicción y sustracción de vectores. Matemático

Primero se tiene que descomponer cada vector en sus componentes rectangulares:



Enseguida se calculan las componentes del vector resultante Rx y Ry:

$R_x = \sum F_x =$ Suma de las componentes en "x" de los vectores.

$R_y = \sum F_y =$ Suma de las componentes en "y" de los vectores.

Calculamos la magnitud del vector resultante (R) usando la expresión: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

Por último, se calcula el ángulo que forma el vector resultante con respecto a la horizontal usando:

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right|$$

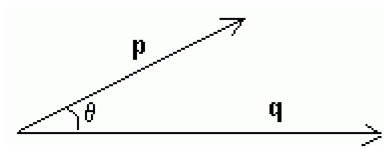
Producto de un escalar por un vector, producto escalar y vectorial de vectores.

Producto escalar de dos vectores.

Sean dos vectores p, q, se define el producto escalar de p y q como:

$$p \cdot q = p\, q \cos\theta$$

siendo θ el ángulo formado por los dos vectores:



Si los vectores p y q están expresados en sus componentes cartesianas:

$$\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} + p_z\hat{k}$$
$$\vec{q} = q_x\hat{i} + q_y\hat{j} + q_z\hat{k}$$

entonces su producto escalar es:

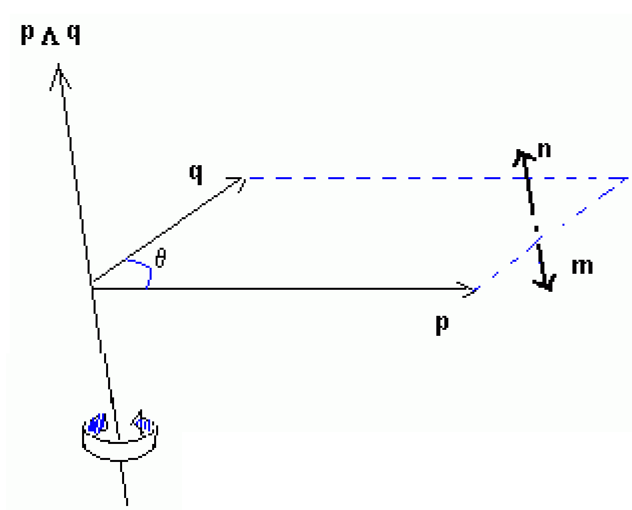
$$\vec{p}\cdot\vec{q} = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z$$

Producto vectorial de dos vectores.

Sean dos vectores p, q, se define el producto vectorial de p y q como:

$$p \bigwedge q = pq\ \sin\theta\, n$$

siendo **n** un vector unitario perpendicular al plano formado por ambos vectores en el sentido de la regla del tornillo (al hacer girar p hacia q el tornillo avanza hacia arriba), tal como se aprecia en la siguiente figura.



Es decir, el producto vectorial de dos vectores p, q es un vector, p /\ q, cuyo módulo, |p /\ q|, mide (p q sin q), y su dirección y sentido lo da el vector unitario n (llamado "vector normal" del plano formado por ambos vectores).

Para el producto vectorial hay que tener en cuenta el orden de los vectores, puesto que:

$$p \bigwedge q = pq \ \sin\theta \, m$$

que se trata de un vector igual, pero de sentido opuesto a p /\ q.

Producto vectorial de vectores unitarios.

Aplicando la definición de producto vectorial a los vectores unitarios i, j y k se obtiene el módulo:

|i x i |= |j x j |= |k x k |= 1 x 1 sen 0° = 1X 1 X 0 = 0

|i x j |=|j x k |= |k x i |= 1 x 1 sen 90° = 1 x 1 x 1 = 1

Aplicando la regla de la mano derecha tenemos que:

i x j = k; j x k = i; k x i = j

Y por lo mencionado en la propiedad no conmutativa:

i x j = - j x i = k j x k = - k x j = i k x i = - i x k = j

Para poder calcular el producto vectorial a x b cuando se conocen las componentes x, y, z de los

vectores ***a*** y ***b***, expandimos el producto vectorial y utilizamos los vectores unitarios.

Sean: a = a_x i + a_y j + a_z k y b = b_x i + b_y j + b_z k

a x b = (a_x i + a_y j + a_z k) x (b_x i + b_y j + b_z k)

a x b = a_x i x b_x i + a_x i x b_y j + a_x i x b_z k + a_y j x b_x i + a_y j x b_y j + a_y j x b_z k + a_z k x b_x i + a_z k x b_yj + a_z k x b_z k

Se aprecia que el 1°, 5° y 9° términos son nulos (i x i = j x j = k x k = 0). Agrupando el 6° y 8° término obtenemos la primera componente (j x k = - k x j = i), el 7° y 3° nos proporcionan la segunda (k x i = - i x k = j) y finalmente el 2°y 4° término determinan la tercer componente (i x j= - j x i = k)

$$\boxed{\mathbf{a \times b} = (a_y\, b_z - a_z\, b_y)\ \mathbf{i}\ + (a_z\, b_x - a_x\, b_z)\ \mathbf{j} + (a_x\, b_y - a_y\, b_x)\ \mathbf{k}}$$

◀ Producto vectorial en función de las componentes

El producto vectorial también se puede expresar en forma de determinante:

$$\mathbf{a \times b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

◀ Producto vectorial expresado como determinante

Aplicando la regla de Sarrus (se repiten las dos primeas filas debajo de la tercera fila o las dos primeras columnas a la derecha de la tercera columna, se suman los tres productos paralelos a la diagonal principal – línea de punto- y se restan los tres productos paralelos a la contradiagonal – línea llena-), se puede resolver este determinante de dimensión tres por tres

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_y\, b_z\ \mathbf{i} + a_z\, b_x\, \mathbf{j} + a_x\, b_y\, \mathbf{k} - a_y\, b_x\, \mathbf{k} - a_z\, b_y\, \mathbf{i} - a_x\, b_z\, \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\ a_y\, b_z - a_z\, b_y\ )\ \mathbf{i} + (\ a_x\, b_z - a_x\, b_z\ )\ \mathbf{j} + (a_x\, b_y - a_y\, b_x\ )\ \mathbf{k}$$