RESUMEN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

SESIÓN 16.
PROF. MIGUEL MERLOS
PROBAILIDAD Y
ESTADÍSTICA_ADMINISTRACIÓN

Espacio muestral

El conjunto formado por los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**.

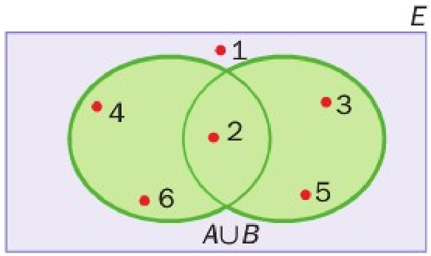
Experimentos compuestos. Espacio producto

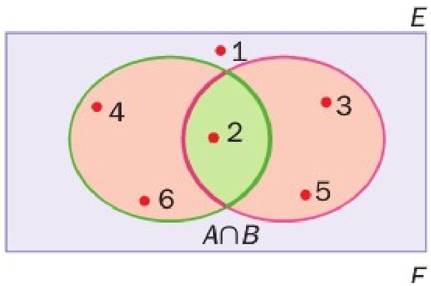
Los experimentos formados por varios experimentos simples se llaman **experimentos compuestos**.

Tipos de sucesos

- **Sucesos elementales:** son los formados por un único punto muestral, es decir, por un solo resultado del experimento aleatorio. Son los elementos del espacio muestral.
- **Sucesos compuestos:** son los formados por dos o más puntos muestrales, es decir, por más de un resultado del experimento.
- **Suceso cierto.** Es el que siempre ocurre. También se llama suceso seguro. Está formado por todos los resultados posibles del experimento, es decir, coincide con el espacio muestral y se representa por E.
- **Suceso imposible:** es el que nunca ocurre, y se designa por $\varnothing$. El suceso imposible es el conjunto vacío.
- **Suceso contrario** del suceso A: es el suceso que ocurre cuando no se produce A. Se denota por $\overline{A}$ o A'.

Por ejemplo si tiramos un dado, los posibles resultados son el espacio muestral. Cada una de las puntuaciones sería un suceso elemental, salir número par sería un suceso compuesto ya que está formado por varios sucesos elementales.





Unión de sucesos

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso unión de *A* y *B*** al que se produce cuando se realiza A o B o ambos. Se designa por **A ∪ B**.

El suceso $A \cup B$ está formado por todos los puntos muestrales que pertenecen a algunos de los dos sucesos, *A* o *B*.

Intersección de sucesos

Dados dos sucesos, *A* y *B*, de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso intersección de *A* y *B*** al que se produce cuando se realizan simultáneamente los sucesos *A* y *B*. Se designa por $\boldsymbol{A \cap B}$.

El suceso $A \cap B$ está formado por todos los puntos muestrales comunes a los sucesos *A* y *B*.

Si la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, se dice que dichos sucesos son **incompatibles**. En caso contrario se dice que son **compatibles**.

La intersección responde a suceso de tipo “y”. Que ocurra el suceso A y el B. Por ejemplo: par y mayor que 2

La unión de tipo “o”. Que ocurra A o B. Por ejemplo: par o mayor que cuatro.

Algunas definiciones de probabilidad: De Bernoulli, de Laplace y de Kolmogorov

La **probabilidad** de un suceso, A, de un experimento aleatorio que puede repetirse un número indefinido de veces, n, es igual al número al que se aproximan las frecuencias relativas del suceso.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A)$$

Si un espacio muestral es equiprobable, entonces la **probabilidad de un suceso A** es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

Si indicamos la probabilidad de A por $P(A)$, esta definición se puede expresar así:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Se llama **probabilidad** a una ley (función o aplicación) que asocia a cada suceso A, de un espacio de sucesos, $\mathbf{P(E)}$, un número real que se denomina probabilidad de A y se representa por $\mathbf{P(A)}$, que cumple los siguientes axiomas:

1.º La probabilidad de un suceso cualquiera es positiva o nula:

$$P(A) \geqslant 0$$

2.º La probabilidad del suceso cierto es igual a la unidad:

$$P(E) = 1$$

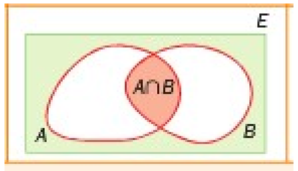
3.º La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (A \text{ y } B \text{ incompatibles})$$

Sucesos compatibles

Si A y B son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la **probabilidad de la unión de A y B** es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, menos la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



EJERCICIOS RESUELTOS

De una baraja española de 40 cartas se extrae una al azar. Halla las siguientes probabilidades.

a) Que la carta elegida sea menor que cinco o figura.

b) Que la carta elegida sea menor que cinco o basto.

Se consideran los siguientes sucesos:

$$A = \text{“Salir menor que 5”} \Rightarrow P(A) = \frac{16}{40}$$

$$B = \text{“Salir figura”} \Rightarrow P(B) = \frac{12}{40}$$

$$C = \text{“salir bastos”} \Rightarrow P(C) = \frac{10}{40}$$

a) Los sucesos A y B son incompatibles. Entonces:

$$P(\text{menor que 5 o figura}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{16}{40} + \frac{12}{40} = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}$$

b) Los sucesos A y C son compatibles. Entonces:

$$P(\text{menor que 5 o basto}) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) =$$

$$= \frac{16}{40} + \frac{10}{40} - \frac{4}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Se llama probabilidad condicionada del suceso *B* respecto del suceso *A*, y se denota por $P(B/A)$, el cociente siguiente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0$$

Análogamente, la probabilidad condicionada del suceso A respecto del suceso B viene dada por la siguiente expresión:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) \neq 0$$

De las dos relaciones anteriores se obtiene:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

La primera sería la probabilidad de que ocurra el suceso B habiendo ocurrido antes el suceso A. Es la probabilidad de la intersección (o sea, ocurren los sucesos A y B) relativa al suceso A.

Lo mismo para la segunda cambiando A por B y B por A.

Dependencia e independencia de sucesos

Dos sucesos A y B son independientes si no están relacionados entre si.

Dos sucesos A y B son **independientes** si $P(B) = P(B/A)$.

Dos sucesos A y B son **dependientes** si $P(B) \neq P(B/A)$.

Otra forma de caracterizar la **independencia de sucesos** es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \\[2ex] P(B/A) = P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Unos cuantos ejemplos

De los 600 alumnos de un instituto, 240 tienen los ojos claros, 325 son morenos y 110 son rubios con los ojos oscuros. Se escoge un alumno al azar. Halla la probabilidad:

a) De que sea rubio.

b) De que tenga los ojos oscuros.

c) De que sea moreno y tenga los ojos claros.

d) De que sea moreno sabiendo que tiene los ojos claros.

Se consideran los sucesos:

A = "tener los ojos claros" $\Rightarrow \overline{A}$ = "tener los ojos oscuros"

B = "tener el pelo moreno" $\Rightarrow \overline{B}$ = "tener el pelo rubio"

Los sucesos A y $\overline{A}$ son incompatibles, y su unión es el espacio total. Lo mismo sucede con B y $\overline{B}$. Teniendo esto en cuenta, se pueden organizar los datos en la tabla de contingencia de la derecha:

	A	$\overline{A}$	Totales
B	75	250	325
$\overline{B}$	165	110	275
Totales	240	360	600

a) $P(\overline{B}) = \dfrac{275}{600}$ b) $P(\overline{A}) = \dfrac{360}{600}$

c) $P(A \cap B) = \dfrac{75}{600}$ d) $P(B/A) = \dfrac{75}{240}$

En un experimento se sabe que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$ y $P(A/B) = 0{,}1$. Halla $P(A \cup B)$.

Por la definición de probabilidad condicionada se tiene:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0{,}1 = \frac{P(A \cap B)}{0{,}3} \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}03 = 0{,}87.$$

Tenemos una urna con 5 bolas rojas y tres verdes y consideramos el suceso A="sacar bola roja" y el B="Sacar bola verde" Si sacamos primero una bola y después otra, la segunda extracción estaría condicionada por la primera si no ha habido recolocación de la primera bola en la urna.

Sin recolocación la probabilidad de sacar dos bolas rojas sería:

P({R1ª ,R2ª}) = P(R1ª) . P(R1ª/R2ª) = (5/8) . (4/7)=20/56 (queda una bola roja menos por tanto también una bola menos)

Si ha habido recolocación de la primera en la urna después de extraerla los dos experimentos son independientes y las dos extracciones se producen en las mismas condiciones, por tanto, la probabilidad sería:

P({R1ª,R2ª}) = P(R1ª) . P(R2ª) =P((5/8) . (5/8)

EJERCICIO RESUELTO

. De los 600 alumnos de un instituto, 240 tienen los ojos claros, 325 son morenos y 110 son rubios con los ojos oscuros. Se escoge un alumno al azar. Halla la probabilidad:

a) De que sea rubio.

b) De que tenga los ojos oscuros.

c) De que sea moreno y tenga los ojos claros.

d) De que sea moreno sabiendo que tiene los ojos claros.

Se consideran los sucesos:

A = "tener los ojos claros" $\Rightarrow \overline{A}$ = "tener los ojos oscuros"

B = "tener el pelo moreno" $\Rightarrow \overline{B}$ = "tener el pelo rubio"

Los sucesos A y $\overline{A}$ son incompatibles, y su unión es el espacio total. Lo mismo sucede con B y $\overline{B}$. Teniendo esto en cuenta, se pueden organizar los datos en la tabla de contingencia de la derecha:

	A	$\overline{A}$	Totales
B	75	250	325
$\overline{B}$	165	110	275
Totales	240	360	600

a) $P(\overline{B}) = \frac{275}{600}$ b) $P(\overline{A}) = \frac{360}{600}$

c) $P(A \cap B) = \frac{75}{600}$ d) $P(B/A) = \frac{75}{240}$

En un experimento se sabe que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$ y

$P(A/B) = 0{,}1$. Halla $P(A \cup B)$.

Por la definición de probabilidad condicionada se tiene:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0{,}1 = \frac{P(A \cap B)}{0{,}3} \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$$

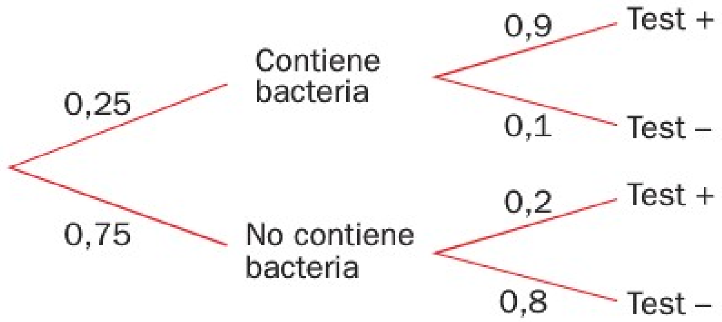
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}03 = 0{,}87.$$

Un test para detectar la presencia de cierto tipo *T* de bacteria en el agua da positivo con una probabilidad de 0,9 en caso de haberlas. Si no las hay, la probabilidad de que dé positivo es 0,2. Se dispone de 100 muestras de agua de las cuales solo 25 contienen bacterias del tipo *T*. Se elige una muestra al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicha muestra contenga bacterias del tipo *T* y que si se aplica el test dé positivo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dicha muestra no contenga bacterias del tipo *T* y dé positivo en el test?

Se hace un diagrama de árbol con los datos, escribiendo la probabilidad de cada rama como el producto de las probabilidades de los distintos tramos de la rama:



Llamando T = "agua con bacterias" L = "agua sin bacterias"

$+$ = "test positivo" $-$ = "test negativo"

a) $P(\text{contenga bacterias y test positivo}) = P(T) \cdot P(+/T) = 0{,}25 \cdot 0{,}9 = 0{,}225$

b) $P(\text{no contenga bacterias y test positivo}) = P(L) \cdot P(+/L) = 0{,}75 \cdot 0{,}2 = 0{,}15$

Si consideramos tres sucesos y estos son independientes dos a dos, entonces de forma similar al caso de dos sucesos, la probabilidad sería:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Por ejemplo tiro de forma sucesiva tres monedas (sucesos independientes), la probabilidad de que salga:
{ cara, cruz, cara}, sería P({ cara, cruz, cara}) =(1/2) (1/2) (1/2) = 1/8

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Primero una definición. Se llama sistema completo o partición de un conjunto A a una colección de conjuntos tales que sean disjuntos entre si (intersección de las partes = conjunto vacio) y que la unión de todos es conjunto A.

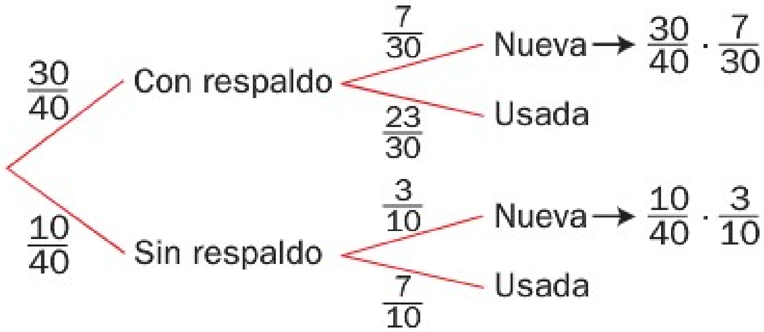
En el ejemplo siguiente una partición la formada por un subconjunto de sillas con respaldo y otro de sillas sin respaldo. Otra partición sería por una parte sillas nuevas y por otra sillas viejas.

La probabilidad de silla nueva se obtiene como suma de las probabilidades de los caminos que nos llevan a silla nueva

EJERCICIO RESUELTO

1. En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas, y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas. Elegida al azar una silla, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

Se ordenan los datos en un diagrama de árbol



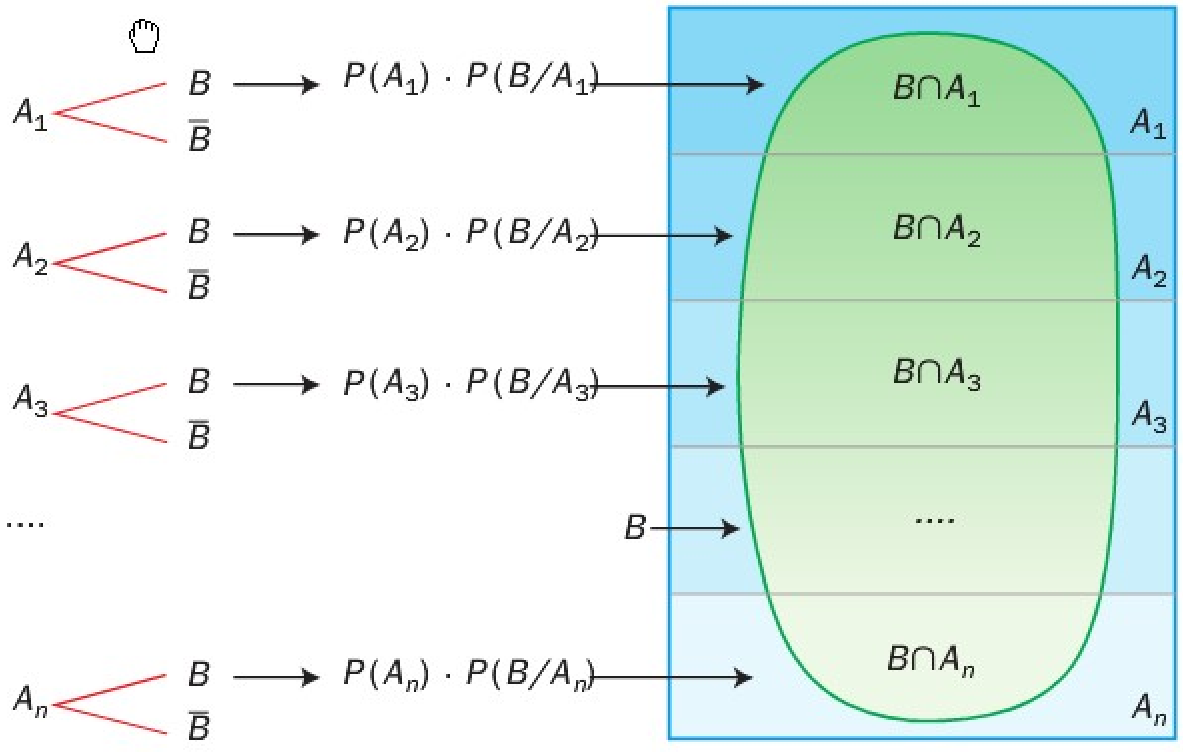
$P(\text{nueva}) = P(\text{nueva con respaldo}) + P(\text{nueva sin respaldo}) =$

$$= \frac{30}{40} \cdot \frac{7}{30} + \frac{10}{40} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{4}$$

Teorema de la probabilidad total

Teorema de la probabilidad total. Sea A_1, A_2, …, A_n un sistema completo de sucesos y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la siguiente expresión:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$



TEOREMA DE BAYES

Nos permite calcular la probabilidad de que habiendo ocurrido el suceso B, ocurra el suceso A_i a posteriori.

La demostración resulta inmediata (te la puedes saltar). Teniendo en cuenta la definición de probabilidad condicionada vista en la diapositiva 5 y la figura anterior donde aparece una partición $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ del conjunto A y un conjunto B compatible con A, se tiene:

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B)$$

Despejando $P(A_i/B)$, se tiene:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} \quad [1]$$

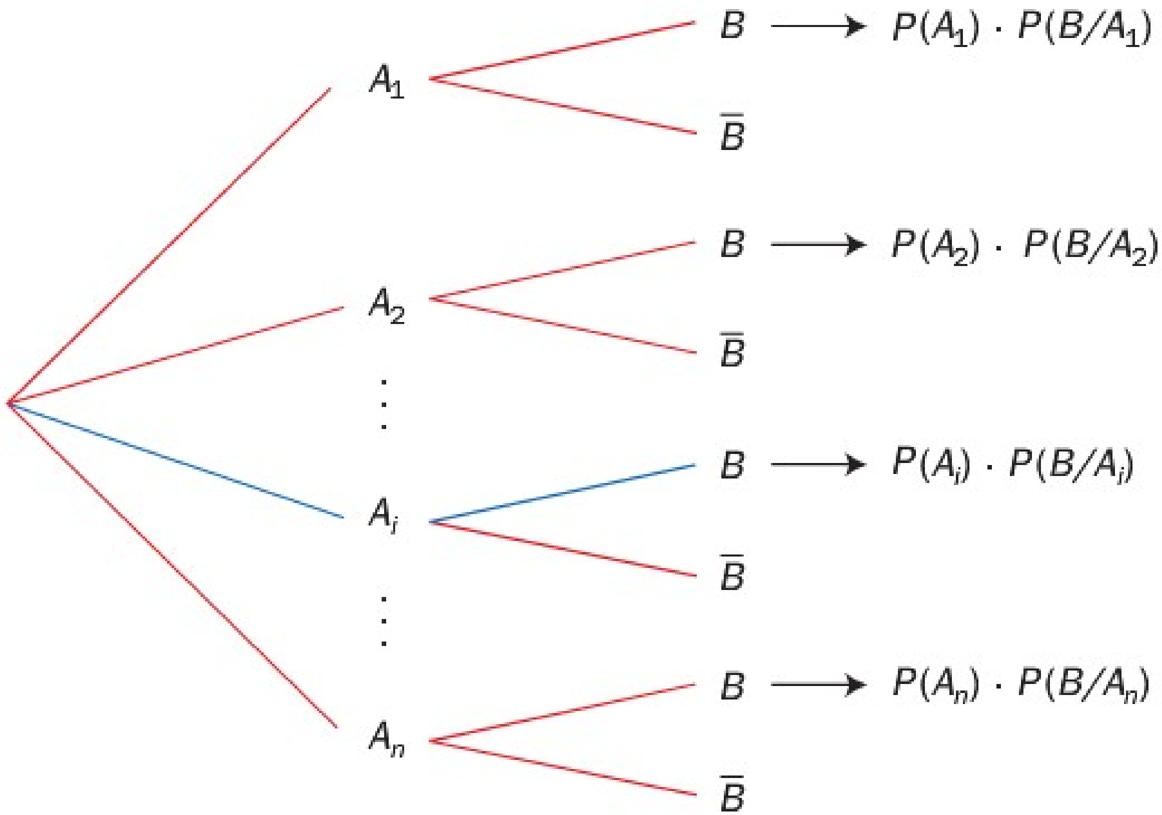
Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

Sustituyendo en [1] se obtiene la fórmula del teorema de Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

En la práctica es útil ordenar los datos en árbol.



Para la obtención de $P(A_i/B)$ basta hallar el cociente entre la probabilidad obtenida en la rama de color azul y la probabilidad obtenida al sumar todas las ramas que parten de B.

Teorema de Bayes

Sea A_1, A_2, …, A_n un sistema completo de sucesos, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$. **El teorema de Bayes** establece que las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

- Las probabilidades $P(A_i)$ se denominan **a priori**.
- Las probabilidades $P(B/A_i)$ se denominan **verosimilitudes**.
- Las probabilidades $P(A_i|B)$ se denominan **a posteriori.**

Unos cuantos ejercicios para fijar ideas sobre lo visto hasta ahora

Probabilidad: definición y propiedades

En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al fútbol o al baloncesto, y el 10% practica ambos deportes. Además hay un 60% que no juega al fútbol. Escogido un alumno al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Juegue sólo al fútbol.

b) Juegue sólo al baloncesto.

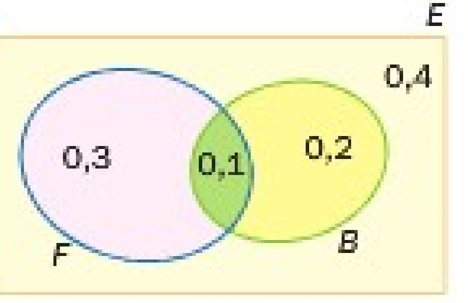
c) Practique uno solo de los deportes.

d) No juegue ni al fútbol ni al baloncesto.

Se consideran los siguientes sucesos:

F = "jugar al fútbol", B = "jugar al baloncesto".

Se utiliza un diagrama de Venn para calcular el número de alumnos que practican un único deporte.



En $F \cap B$ están el 10% de los alumnos.

Como el 60% no juega al fútbol, se deduce que el 40% juega.

Por tanto, hay un 40% − 10% = 30% de alumnos que juegan solo al fútbol.

Como el 60% de los alumnos practica fútbol o baloncesto, se deduce que el 20% practica solo baloncesto.

a) 0,3

b) 0,2

c) 0,3 + 0,2 = 0,5

d) 1 − 0,6 = 0,4

Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos

Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6; la probabilidad de que pase la segunda es 0,8, y la de que pase ambas es 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que pase al menos una prueba?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no pase ninguna prueba?

c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera?

Se consideran los siguientes sucesos:

A = "pasar la primera prueba" $\Rightarrow P(A) = 0{,}6$

B = "pasar la segunda prueba" $\Rightarrow P(B) = 0{,}8$

$A \cap B$ = "pasar las dos pruebas" $\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}5$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) $P(A) = 0{,}6; \quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625.$

Como $P(A) \neq P(A/B)$, A y B no son independientes.

d) $B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}); \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A});$

$0{,}8 = 0{,}5 + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0{,}3 \Rightarrow$

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}3}{1 - 0{,}6} = 0{,}75$$

Probabilidad total y teorema de Bayes

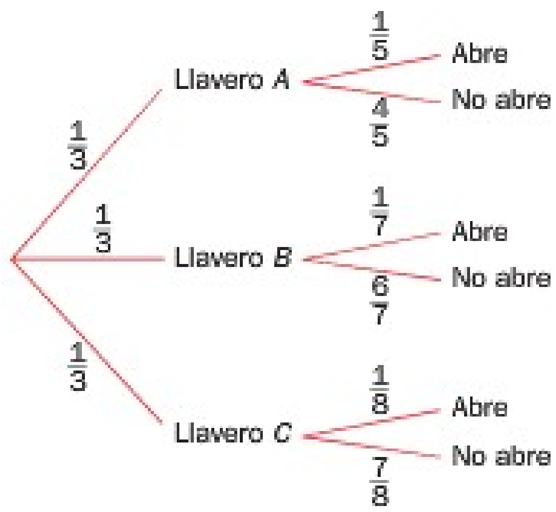
En una casa hay tres llaveros *A*, *B* y *C*, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.

a) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el *C* y la llave no abra?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero *A*?

Se ordenan los datos en un diagrama de árbol.



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad compuesta.

$$P(\text{llavero } C \text{ y no abrir}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{24} = 0{,}2917$$

b) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{abrir}) = P(\text{abrir}/A) \cdot P(A) + P(\text{abrir}/B) \cdot P(B) + P(\text{abrir}/C) \cdot P(C) =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} = \frac{131}{840} = 0{,}1559$$

c) Es una aplicación del teorema de Bayes.

$$P(\text{llavero } A/\text{abre}) = \frac{P(\text{abrir}/A) \cdot P(A)}{P(\text{abrir})} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24}} = 0{,}4275$$