

Probabilidad y Estadística.

Teoría de Conjuntos.

INTRODUCCIÓN.

La teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, también, es la teoría matemática donde fundamentar la aritmética y el resto de las teorías matemáticas. Igualmente, es una parte de la lógica y en particular una parte de la lógica de predicados. Los conjuntos son un agregado o colección de objetos de cualquier naturaleza con características bien definidas de manera que se puedan distinguir todos sus elementos, por ejemplo: el conjunto de días de la semana, el conjunto de las vocales, el conjunto de los números reales, el conjunto de valores que se pueden obtener al lanzar un dado, etc. Tomando el ejemplo del lanzamiento de un dado, se tiene que este caso es un experimento que tiene como resultado los valores: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Si quisiéramos saber cuál es la posibilidad de que aparezca un 1 o un 6 en el dado, estaríamos empleando la probabilidad a este conjunto o experimento. Es por ello, que la teoría de conjuntos es aplicada a la probabilidad A continuación se da a conocer la definición, notación, operaciones, representación geométrica, leyes, etc. de los conjuntos.

DEFINICIÓN.

De acuerdo a Spiegel, un conjunto es una colección de objetos llamados miembros o elementos del conjunto. Algunos sinónimos de conjunto son: clase, grupo y colección. Para Marques, un conjunto es un agregado o colección de objetos de cualquier naturaleza con características bien definidas de manera que se puedan distinguir todos sus elementos. A los objetos que lo componen se les llama elementos del conjunto.

NOTACIÓN.

Un conjunto se denota con una letra mayúscula A, B, C y el elemento por una letra minúscula a, b. A los elementos se les encierra entre llaves ({ }) y se separan por comas (,).

Ejemplos:

1. El conjunto D cuyos elementos son los números que aparecen al lanzar un dado.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. El conjunto de días de la semana.

$$S = \{\text{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}\}$$

3. El conjunto de las vocales.

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

4. El conjunto de los enteros positivos menores que 10.

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

MÉTODOS PARA DEFINICIÓN DE CONJUNTOS.

Al definir un conjunto se puede hacer de dos formas:

Método de Extensión o Numeración.

En este método se hace un listado de sus elementos, si esto es posible.

Ejemplos:

1. El conjunto de las vocales en el alfabeto.

$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

2. Lanzamiento de un par de dados comunes.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3. El conjunto de los triángulos en un plano.

El método de extensión para este caso no se puede utilizar.

Método de Comprensión o Descripción.

Se describe alguna propiedad conservada por todos sus miembros y por los no miembros.

Ejemplos:

1. El conjunto de las vocales en el alfabeto.

$$V = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$$

2. El conjunto de los triángulos en un plano

$$T = \{x \mid x \text{ es un triángulo en un plano}\}$$

El conjunto del ejemplo 1 se lee “El conjunto de los elementos x tales que x es una vocal”. La línea vertical $|$ se lee “tal que” ó “dado que”. Para el ejemplo 2, se lee “El conjunto de los elementos x dado que x es un triángulo en un plano”.

TIPOS DE CONJUNTOS.

Según la cantidad de elementos que tenga un conjunto, éstos se pueden clasificar de la siguiente manera:

Conjuntos Finitos.

Son los que tienen un número conocido de elementos.

Ejemplos:

- El conjunto de números que aparecen al lanzar un dado.
- El conjunto de días de la semana.
- El conjunto de las vocales.
- El conjunto de los enteros positivos menores que 10.

Conjuntos Infinitos.

Son lo que tienen un número ilimitado de elementos.

- El conjunto de los números reales
- El conjunto de los números reales entre 2 y 5

Conjunto universal.

Es el conjunto de todos los elementos considerados en un problema o situación dada.

Ejemplos:

1. Si solo se desea trabajar con los números reales positivos, el conjunto universal será $U = R^+ = (0, +\infty)$
2. Si se quiere trabajar con los números que aparecen en un dado, el conjunto universal será $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Se puede notar que el conjunto universal no es único, depende de la situación.

Conjunto vacío Un conjunto que no tiene elementos y se denota por \emptyset ó $\{ \}$.

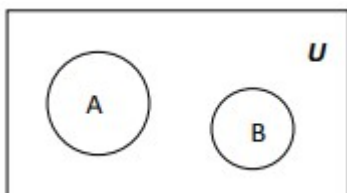
Ejemplos:

1. El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 = 0\}$ es un conjunto vacío porque no hay ningún número real que satisfaga $x + 1 = 0$.
2. El conjunto de los meses del año con 27 días.

DIAGRAMAS DE VENN.

Cualquier figura geométrica cerrada (círculos, rectángulos, triángulos, óvalos, etc) sirve para representar gráficamente las operaciones entre conjuntos, estos gráficos son llamados Diagramas de Venn.

Normalmente, al conjunto universal se le representa con un rectángulo y los conjuntos con un círculo o elipse, tal y como se muestra en la siguiente figura:

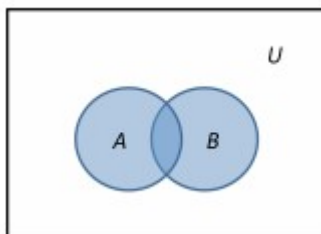


Los diagramas de Venn en ningún momento constituyen una prueba matemática; sin embargo, permiten tener una visión intuitiva de la relación que puede existir entre los conjuntos.

OPERACIONES DE CONJUNTOS.

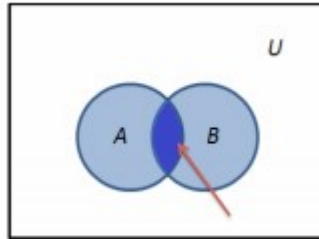
Unión.

El conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B, o tanto a A como a B, se llama la unión de A y B y se escribe $A \cup B$. (Área sombreada).



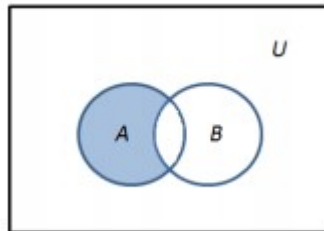
Intersección.

El conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y B se llama la intersección de A y B y se escribe $A \cap B$. (Área sombreada).



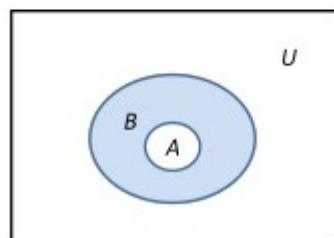
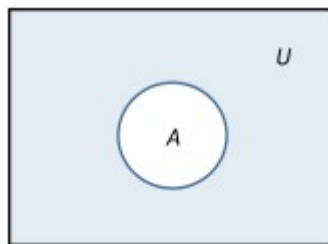
Diferencia.

El conjunto que consiste en todos los elementos de A que no pertenecen a B se llama la diferencia de A y B y se escribe $A - B$. (Área sombreada).



Complemento.

Son todos los conjuntos no en A y se escribe A' . (Área sombreada).



Ejemplos de Operaciones de Conjuntos

Sean:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{7, 8, 9\}$$

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$
- $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A \cap B = \{3, 4\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = \{7\}$
- $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
- $B' = \{1, 2, 8, 9\}$
- $C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A - B = \{1, 2\}$
- $B - A = \{5, 6, 7\}$
- $A - C = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C - A = \{7, 8, 9\}$
- $B - C = \{3, 4, 5, 6\}$
- $C - B = \{8, 9\}$
- $(A \cup B)' = \{8, 9\}$

LEYES DE CONJUNTOS.

Ley conmutativa.

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Ley asociativa.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ley distributiva.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

EVENTOS.

La teoría de conjuntos es aplicada a la probabilidad con algunas modificaciones en su terminología: al universo se le llama espacio muestral; a los subconjuntos, eventos; y a los puntos en el conjunto, eventos simples o sucesos. Algunas definiciones propias de los eventos son:

- Experimento: es un conjunto de pruebas o la realización de un proceso que conducen a un resultado y observación del cual no se está seguro. Por ejemplo: el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, etc.
- Espacio muestral: para un experimento, es el conjunto de todos los resultados experimentales, esto es, cuando se haya especificado todos los resultados posibles, se habrá identificado el espacio muestral del experimento. Un resultado experimental también se conoce como punto muestral para identificarlo como elemento del espacio muestral. Ejemplo: Para el experimento de lanzar una moneda, el espacio muestral es sol y águila. Para el experimento de lanzar un dado, el espacio muestral es 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- Eventos: son los resultados posibles que presentan una condición dada al realizar un experimento. Cada resultado posible lo constituye el elemento o suceso.

RESUMEN.

El concepto de conjunto es fundamental para el estudio de la probabilidad, la estadística y de la matemática en general, ya que se utilizan para realizar experimentos o pruebas que conduzcan a un resultado. El resultado va a estar dado en base a las condiciones del experimento. En general, un conjunto es un grupo de elementos u objetos correctamente definidos. Dentro de la probabilidad, cuando se lleva a cabo un experimento siempre hay incertidumbre sobre si un resultado específico ocurrirá o no, por lo tanto, de aquí la importancia de aprender sobre los conjuntos y la relación con la probabilidad. Existen operaciones que se pueden utilizar para el manejo de los conjuntos o eventos, las cuales son: unión, intersección, diferencia o complemento. Las operaciones se refieren a si los eventos pertenecen a un cierto evento compuesto. También cabe mencionar que los conjuntos se pueden representar geoméricamente para mostrar las relaciones entre ellos, por lo que, se utiliza el diagrama de Venn. Las leyes que se aplican a los conjuntos son la conmutativa, asociativa y distributiva.

REFERENCIAS

- Christensen, H. Estadística paso a paso. Trillas. 3ª edición. México. 2001.
- Martínez, C. Estadística Básica Aplicada. ECOE Ediciones. Tercera Edición. Bogotá. 2006.
- Marques, M. Probabilidad y Estadística para Ciencias Químico-Biológicas. Mc.Graw Hill. México. 1991
- Spiegel, M. Probabilidad y Estadística. Mc.Graw Hill. México. 1975.