

# Cálculo integral

**Integración por partes**  
**Integración por sustitución**  
**trigonométrica**

**Claudia Leyva Suárez**

# Integración por partes $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ (Un Día Ví = Una Vaca- $\int Vestida \, De \, Uniforme$ )

## Consejos:

- Como norma general, llamaremos  $u$  a las potencias y logaritmos; y  $dv$  a las exponenciales, fracciones y funciones trigonométricas.
- No cambiar la elección, cuando se requiere aplicar el método más de una vez para calcular la misma integral, al aplicarlo una segunda vez, se debe de llamar  $u$  al resultado  $du$  del paso anterior y lo mismo para  $dv$ .
- Integrales cíclicas: en ocasiones, tras aplicar dos veces integración por partes, se debe despejar la propia integral de la igualdad obtenida para obtenerla.

## Resolver la siguiente integral $\int xe^x dx$

- I → Inversa.
- L → Logarítmica.
- A → Algebraica.
- T → Trigonométrica.
- E → Exponencial.

De acuerdo con el orden de ILATE muestra que la integral “x” es algebraica y  $e^x$  es exponencial por lo que la primer integral debe ser u.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx \quad \text{Se resuelve la integral}$$

$$\begin{array}{ll} u = x & dv = \int e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x - 1) + c$$

Determinar la integral:  $\int xe^{3x} dx$

### Resolución

a)  $\frac{1}{3}xe^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C$

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \int e^{3x} dx$$
$$v = 3e^{3x} \rightarrow \frac{v}{3} = \frac{3}{3}e^{3x}$$

b)  $-\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

$$\int xe^{3x} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx$$

c)  $\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$



d)  $-\frac{1}{3}xe^{3x} + \frac{1}{9}e^{3x} + C$

$$\int xe^x dx = \frac{xe^x}{3} - \frac{e^x}{9} + C$$

Determinar la siguiente integral:  $\int \ln 2x dx$

Resolución

$$u = \ln 2x \quad du = \frac{2}{2x} dx = \frac{dx}{x}$$

a)  $x \ln 2x + \frac{x^2}{2} + C$

$$dv = \int dx \quad v = x$$

b)  $x \ln 2x - \frac{x^2}{2} + C$

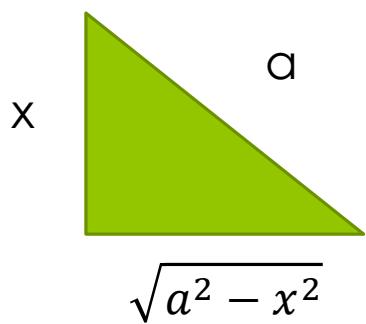
$$\begin{aligned}\int \ln 2x dx &= x \ln 2x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln 2x - \int dx \\ &= x \ln 2x - x\end{aligned}$$

c)  $-x \ln 2x - \frac{x^2}{2} + C$

d)  $-x \ln 2x + \frac{x^2}{2} + C$

# Integración por el método de sustitución trigonométrica

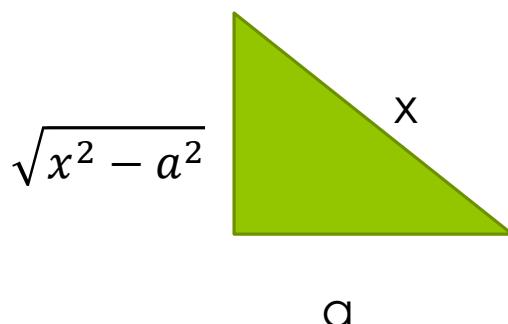
Caso 1



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{c.o}{h} = \frac{x}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{c.a}{h} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

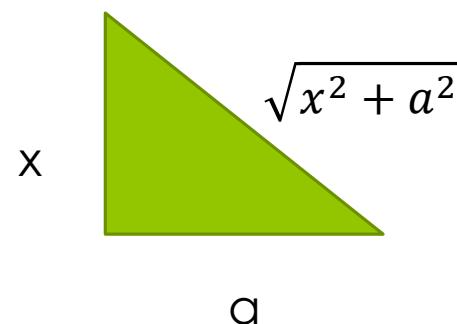
Caso 2



$$\tan \alpha = \frac{c.o}{c.a} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{h}{c.a} = \frac{x}{a}$$

Caso 3



$$\tan \alpha = \frac{c.o}{c.a} = \frac{x}{a}$$

$$\sec \alpha = \frac{c.o}{c.a} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

Determinar por sustitución trigonométrica, una integral equivalente a:  $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Caso 1



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{3}$$

Despejando x:

$$x = 3 \operatorname{sen} \alpha$$

$$dx = 3 \operatorname{cos} \alpha d\alpha$$

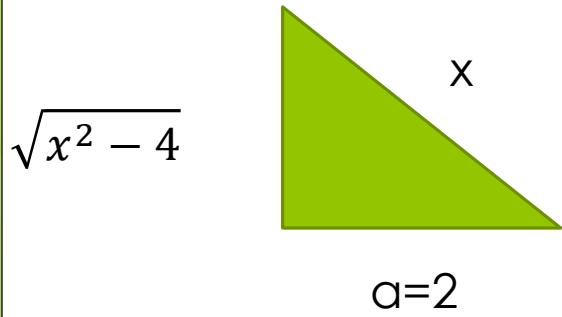
$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\sqrt{9-x^2} = 3 \operatorname{cos} \alpha$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3 \operatorname{sen} \alpha \cdot 3 \operatorname{cos} \alpha d\alpha}{3 \operatorname{cos} \alpha} \\ &= \int 3 \operatorname{sen} \alpha d\alpha \\ &= 3 \operatorname{cos} \alpha + C \\ &= \frac{3 \sqrt{9-x^2}}{3} + C \\ &= \sqrt{9-x^2} + C \end{aligned}$$

Determinar por sustitución trigonométrica, una integral equivalente a:  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Caso 2



$$\sec \alpha = \frac{x}{2}$$

Despejando  $x$ :

$$x = 2\sec \alpha$$

$$dx = 2\sec \alpha \tan \alpha d\alpha$$

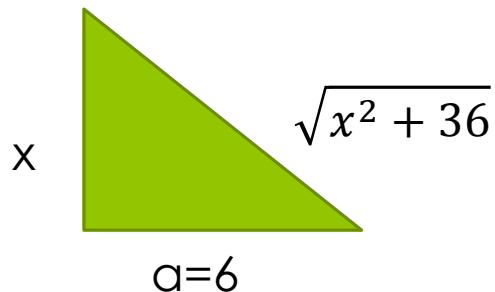
$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = 2\tan \alpha$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4}} &= \int \frac{2\sec \alpha \cdot 2\sec \alpha \tan \alpha d\alpha}{2\tan \alpha} \\ &= \int 2\sec^2 \alpha d\alpha \\ &= 2\tan \alpha + C \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{2} + C \\ &= \sqrt{x^2 - 4} + C \end{aligned}$$

Determinar por sustitución trigonométrica, una integral equivalente a:  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 36}}$

Caso 3



$$\tan \alpha = \frac{x}{6}$$

Despejando  $x$ :

$$x = 6 \tan \alpha$$

$$dx = 6 \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$\sec \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{6}$$

$$\sqrt{x^2 + 36} = 6 \sec \alpha$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 36}} &= \int \frac{6 \tan \alpha \cdot 6 \sec^2 \alpha d\alpha}{6 \sec \alpha} \\ &= \int 6 \tan \alpha \sec \alpha d\alpha \\ &= 6 \sec \alpha + C \\ &= \frac{6 \sqrt{x^2 + 36}}{6} + C \\ &= \sqrt{x^2 + 36} + C \end{aligned}$$

Determinar por sustitución trigonométrica, una integral equivalente

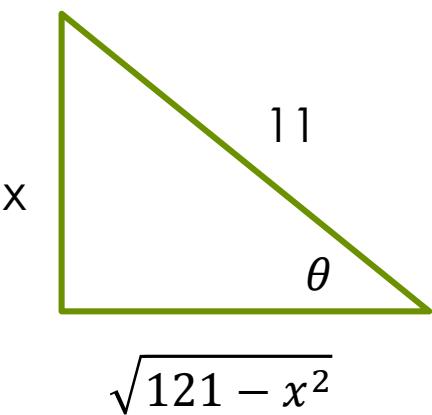
a:  $\int \frac{dx}{\sqrt{(121-x^2)^3}}$

a)  $\frac{1}{121} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$

b)  $\frac{-1}{121} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

c)  $\frac{1}{121} \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$

d)  $\frac{1}{121} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$



Caso 1

$$\begin{aligned}x &= 11 \sin \theta \\ dx &= 11 \cos \theta d\theta \\ \sqrt{121 - x^2} &= 11 \cos \theta\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(121 - x^2)^3}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{121 - x^2})^3}$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{121 - x^2})^3} = \int \frac{11 \cos \theta d\theta}{(11 \cos \theta)^3}$$

$$= \int \frac{11 \cos \theta d\theta}{11^3 \cdot (\cos \theta)^3} = \int \frac{d\theta}{121 (\cos \theta)^2}$$

$$= \frac{1}{121} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{121} \int \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{121} \tan \theta + c = \frac{1}{121} \frac{x}{\sqrt{121 - x^2}} + c$$

$$= \frac{x}{121 \sqrt{121 - x^2}} + c$$

# Ejemplo

- Obtener la integral de  $\int \frac{dx}{\sqrt{81+16x^2}}$

a)  $-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{81+16x^2} + 4x}{9} \right| + c$

b)  $-\ln \left| \frac{\sqrt{81+16x^2} + 4x}{9} \right| + c$

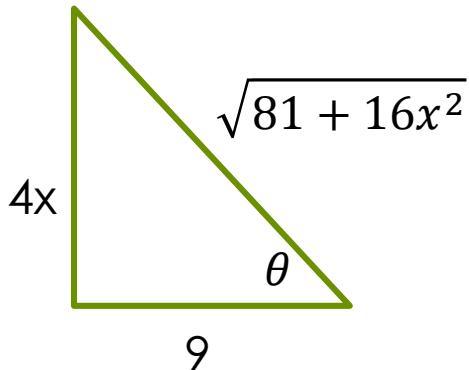
c)  $\ln \left| \frac{\sqrt{81+16x^2} + 4x}{9} \right| + c$

d)  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{81+16x^2} + 4x}{9} \right| + c$



- Obtener la integral de  $\int \frac{dx}{\sqrt{81+16x^2}}$

Caso 3



$$x = \frac{9\tan\theta}{4} = \frac{9}{4}\tan\theta$$

$$dx = \frac{9}{4}\sec^2\theta d\theta$$

$$\sqrt{81 + 16x^2} = 9\sec\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{81 + 16x^2}} = \int \frac{\frac{9}{4}\sec^2\theta d\theta}{9\sec\theta}$$

$$= \int \frac{\sec\theta d\theta}{4} = \frac{1}{4} \int \sec\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{81 + 16x^2}}{9} + \frac{4x}{9} \right| + c$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{81 + 16x^2} + 4x}{9} \right| + c$$