Profesor Miguel Merlos.
Sesión 14.

Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

Probabilidad de un evento.

NOTACIÓN DE PROBABILIDAD

Antes de seguir profundizando en el campo de la teoría de la probabilidad es importante presentarles algunas notaciones básicas de la misma. Utilizaremos la letra P para denotar una probabilidad. Es común utilizar letras mayúsculas como A, B y C para denotar eventos específicos de un experimento. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra el evento A lo denotamos como P(A).

DEFINICIONES DE PROBABILIDAD.

La probabilidad de que ocurra un evento se mide por un número entre cero y uno, inclusive. Si un evento nunca ocurre, su probabilidad asociada es cero, mientras que si ocurriese siempre su probabilidad sería igual a uno. Así, las probabilidades suelen venir expresadas como decimales, fracciones o porcentajes. En el caso de utilizar fracciones para expresar probabilidades, las mismas pueden ser simplificadas pero no es necesario hacerlo. Existen diferentes formas para definir la probabilidad de un evento basadas en formas distintas de calcular o estimar la probabilidad. A continuación discutiremos tres diferentes enfoques. Seleccionar uno de los tres enfoques dependerá de la naturaleza del problema.

Definición Clásica de Laplace, “A Priori” o Teórica.

El enfoque clásico o "a priori" para definir la probabilidad es proveniente de los juegos de azar. Esta definición es de uso limitado puesto que descansa sobre la base de las siguientes dos condiciones:

i. El espacio muestral (S) del experimento es finito (su número total de elementos es un número natural n = 1, 2, 3, …)

ii. Los resultados del espacio muestral deben ser igualmente probables (tienen la misma posibilidad de ocurrir).

Bajo estas condiciones, suponga que realizamos un experimento. El número total de elementos del espacio muestral del experimento es denotado como n(S). Dicho de otro modo, n(S) representa el número total de eventos simples distintos posibles al realizar un experimento. Además, si A es un evento de este experimento, el número total de elementos del espacio muestral contenidos en A es denotado como n(A). Es decir, n(A) representa el número total de formas distintas en que A puede ocurrir. Entonces, la probabilidad de que A ocurra la definimos como

Profesor Miguel Merlos.
Sesión 14.

Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{número de formas distintas en que } A \text{ puede ocurrir}}{\text{número total de eventos simples distintos posibles}}.$$

A partir de esta definición las probabilidades de los posibles resultados del experimento se pueden determinar a priori, es decir, sin realizar el experimento.

Ejemplo:

Al lanzar un dado al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?

Solución:

Suponga que A es el evento de obtener un número par al lanzar un dado al azar. Notemos que S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y todos los resultados igualmente probables. Además, A puede ocurrir de tres formas distintas (2, 4 ó 6). Por lo tanto, n(A)=3 y n(S)= 6, entonces

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo:

Si se extrae una carta de un paquete de 52 cartas de las cuales 26 son negras (13 espadas A, 2, 3, … , 10, J, Q, K); 13 son tréboles); y 26 son rojas (13 corazones y 13 diamantes), halle la probabilidad de que la carta sea

a. una K.
b. roja.
c. de diamante

Solución

a. Suponga que K es el evento de obtener una carta que sea K,

entonces $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ porque el evento de *"extraer una K"* consta de 4 de los 52 resultados igualmente probables.

Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

b. Suponga que R es el evento de obtener una carta que sea roja, entonces $P(R) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ porque el evento de *"extraer una carta roja"* consta de 2 de los 52 resultados igualmente probables.

c. Suponga que D es el evento de obtener una carta que sea de diamante, entonces $P(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ porque el evento de *"extraer una carta de diamante"* consta de 13 de los 52 resultados igualmente probables.

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que en una familia que tiene tres hijos, haya dos niñas y un niño, si se considera igualmente probable el nacimiento de un niño o niña?

Solución

Usando "a" para niña y "o" para niño, el espacio muestra es: S = {aaa, aao, aoa, aoo, oaa, oao, ooa, ooo} por lo que n(S) = 8. Definimos el evento A como que haya dos niñas y un niño, entonces A = {aao, aoa, oaa } y n(A) = 3. Por lo tanto

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = 0.375 \qquad \text{o} \qquad P(A) = 37.5\%.$$

Bajo las mismas premisas de este ejemplo, podemos concluir que el 37.5% de las familias que tienen tres hijos, de éstos dos son niñas y uno es niño.

Definición Empírica, "A Posteriori", Experimental o de Frecuencia Relativa.

La definición clásica se ve limitada a situaciones en las que hay un número finito de resultados igualmente probables. Lamentablemente, hay situaciones prácticas que no son de este tipo y la definición "a priori" no se puede aplicar. Por ejemplo, si se pregunta por la probabilidad de que un paciente se cure mediante cierto tratamiento médico, o la probabilidad de que una determinada máquina produzca artículos defectuosos, entonces no hay forma de introducir resultados igualmente probables. Para responder a estas preguntas podemos utilizar el enfoque empírico, en el cual para determinar los valores de probabilidad se requiere de la observación y de la recopilación de datos. La definición empírica se basa en la frecuencia relativa

Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de repeticiones del experimento. En otras palabras, la definición empírica se basa número de veces que ocurrió el evento entre el número total de repeticiones del experimento. También se le denomina a posteriori, ya que el resultado se obtiene después de realizar el experimento un cierto número grande de veces.

Si queremos conocer la probabilidad del evento A según este enfoque realizamos el experimento un gran número de veces y contamos cuántas veces A ocurre. Con base en estos resultados reales, P(A) se estima de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que ocurrió } A}{\text{número de veces que se repitió el experimento}} \; .$$

Este enfoque de probabilidad no implica ningún supuesto previo de igualdad de probabilidades.

Ejemplo:

Queremos seleccionar una moneda al azar de un envase que contiene una cantidad desconocida de monedas de 25¢, 10¢, 5¢ y 1¢. Para determinar la probabilidad de cada evento posible, seleccionamos 50 monedas al azar con reemplazo (la moneda seleccionada vuelve a echarse en el envase para la próxima selección) de este envase. La siguiente tabla resume las frecuencias (veces que ocurren) de cada moneda.

Moneda Obtenida	Frecuencia
25¢	15
10¢	12
5¢	18
1¢	5

Según los datos recopilados, si seleccionamos una moneda de este envase
a. ¿cuál es la probabilidad de que sea de 25¢ ?
b. ¿cuál es el evento menos probable?
c. ¿cuál es el evento que debemos predecir?

<u>Solución</u>

Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

Notemos que al no conocer el número de monedas de cada clase que hay en el envase, no podemos utilizar la probabilidad clásica para hallar la probabilidad de cada evento posible. Pero, utilizando los resultados anteriores resumidos en la tabla podemos concluir que:

a. Si A es el evento de obtener una moneda de 25¢, entonces

$$P(A) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} .$$

b. El evento menos probable es el de menor frecuencia, es decir, obtener una moneda de 1¢.

E

c. El evento que debemos predecir es el más probable, por lo tanto, es el evento de mayor frecuencia, es decir, obtener una moneda de 5¢.

Se conoce que una moneda está cargada. Esto significa que un lado de la moneda se obtiene con mayor frecuencia que el otro lado al lanzarla al azar un número grande de veces. Para determinar la probabilidad de que caiga cara, la moneda se lanza 60 veces al aire, de las cuales 24 veces cayó cara. Si aplicamos la fórmula obtenemos:

$$P(\text{cara}) = \frac{24}{60}$$

$$P(\text{cara}) = 0.4$$

$$P(\text{cara}) = 40\%$$

Al calcular probabilidades con este método de frecuencias relativas obtenemos una aproximación en vez de un valor exacto. A mayor número de veces que repitamos el experimento, más cerca estará la aproximación del valor real. Esta propiedad se enuncia en forma de teorema, el cual se conoce comúnmente como la ley de los números grandes.

Ley de los Números Grandes

Conforme un experimento se repite una y otra vez, la probabilidad de frecuencias relativas de un evento tiende a aproximarse a la probabilidad real.

Cuando se usa la definición empírica, es importante tomar en cuenta los siguientes aspectos

i. La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real.

ii. Cuanto mayor sea el número de repeticiones del experimento, tanto mejor será la estimación de la probabilidad.

iii. La probabilidad es propia de sólo un conjunto de condiciones idénticas a aquéllas en las que se obtuvieron los datos, o sea, la validez de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean repetidas idénticamente.

Profesor Miguel Merlos.
Sesión 14.
Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Ahora consideraremos el principio de que la probabilidad de un evento suele afectarse por el conocimiento previo de las circunstancias. Por ejemplo, si seleccionamos una persona al azar de la población de Puerto Rico, la probabilidad de obtener un varón es cercana a 50%, pero si usted ya sabe que además la persona a seleccionar es fanática del hipismo, entonces la probabilidad de obtener varón aumenta drásticamente ya que cerca del 90% de los fanáticos del hipismo son varones.

Definición:

La probabilidad condicional de un evento B es la probabilidad de que B ocurra cuando ya sabemos que otro evento A ocurrió. Esta probabilidad se denota P(B | A) y la leemos "la probabilidad de B dado A".

Ejemplo:

Al lanzar un dado, halle la probabilidad de obtener:
a. el número 4 dado que se obtuvo un número par.
b. un número impar dado que se obtuvo un número menor que 6.

Solución

Utilizando la probabilidad condicional, tenemos lo siguiente:
a. Sabemos que se obtuvo un número par, por lo que hay 3 posibles resultados: 2, 4 ó 6, de los cuales en sólo uno de ellos ocurre el 4.

Por lo tanto, P(4 | par) = 1/3

b. Sabemos que se obtuvo un número menor que 6, por lo que hay 5 posibles resultados: 1, 2, 3, 4 ó 5, de los cuales en tres de ellos obtenemos un número impar.

Por lo tanto, P(impar | menor que 6) = 3/ 5

Regla de la Probabilidad Condicional

Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral S, entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)} \quad donde \quad P(B) > 0$$

y

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \text{ y } A)}{P(A)} \quad donde \quad P(A) > 0 .$$

Profesor Miguel Merlos.
Sesión 14.

Probabilidad de un evento; Probabilidad Condicional.

.

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que una carta de póker escogida al azar de un paquete completo de cartas sea un as, sabiendo que la carta es roja?

Solución

Las cartas de póker son 52. Estas se componen de 26 cartas rojas y 26 cartas negras. Además, las 26 cartas rojas se dividen en 13 cartas de corazones y 13 de diamantes . Las 26 cartas negras se dividen en 13 cartas de espada y 13 de trébol . Cada uno de los grupos de 13 cartas tiene una carta de cada uno de los siguientes caracteres A, 1, 2, …, 10, J, Q, K. Entonces

$$P(as \mid roja) = \frac{P(as\ y\ roja)}{P(roja)}$$

$$P(as \mid roja) = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{26}{52}}$$

$$P(as \mid roja) = \frac{2}{52} \cdot \frac{52}{26} = \frac{1}{13}.$$

Ejemplo:

De un total de 14 músicos hay 4 que tocan el cuatro, 7 que tocan guitarra y 3 que tocan ambos instrumentos. Si seleccionamos al azar uno de estos músicos, halle la probabilidad de que toque el cuatro dado que toca guitarra.

Solución

Utilicemos el siguiente diagrama de Venn. Utilicemos C para representar el evento de obtener un cuatrista y G para representar el evento de obtener un guitarrista. Como hay 3 músicos que tocan ambos instrumentos, entonces en la intersección de C y G hay 3 elementos. Ahora, hay 4 músicos que tocan el cuatro de los cuales ya tenemos contados 3 (los que tocan ambos instrumentos), por lo queda 1 que es un elemento de C pero no de G. Además, hay 7 músicos que tocan la guitarra de los cuales ya tenemos contados 3 (los que tocan ambos instrumentos), por lo que quedan 4, los cuales son elementos de G pero no de C. Finalmente nos quedan 6 músicos que no tocan cuatro ni guitarra.

Recuerde que P(C yG) es la probabilidad de obtener un músico que toque cuatro y guitarra, por lo tanto, P(C yG) = 3/14 . Por otro lado, P(G) es la probabilidad de obtener un músico que toque guitarra, por lo tanto, P(G) = 7/14 . Utilizando la regla de probabilidad condicional tenemos que:

$$P(C \mid G) = \frac{P(C\ y\ G)}{P(G)}$$

$$P(C \mid G) = = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{7}{14}}$$

$$P(C \mid G) = \frac{3}{14} \cdot \frac{14}{7}$$

$$P(C \mid G) = \frac{3}{7}$$