Límites Algebraicos

Un límite algebraico es un límite que tiene alguna expresión algebraica y al reemplazarla por el valor dado, nos da una indeterminación. La indeterminación más común en los límites algebraicos es: $\frac{0}{0}$

Siempre que nos den un **Límite**, lo primero que debemos hacer es reemplazar la variable por el valor dado y ver si existe alguna indeterminación.

Si al reemplazar no obtenemos una indeterminación, entonces significa que el valor que nos dio al reemplazar es el valor del límite.

Dentro de los Límites algebraicos, existen tres casos muy comunes que se nos pueden presentar para resolverlos:

- Caso I: Resolver con factorización
- Caso II: Resolver con racionalización del denominador
- Caso III: Resolver multiplicando por el conjugado

Caso I: Resolver con factorización:

Cuando tenemos una expresión algebraica fraccionaria o racional, debemos proceder de la siguiente manera:

1. Factorizamos las expresiones algebraicas en el numerador y en el denominador.
2. Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo.
3. Reemplazamos la variable por el valor dado y obtenemos el resultado del límite.
4. Si aún no se ha quitado la indeterminación, repetimos los pasos 1 al 3 hasta levantar la indeterminación.

Ahora, veamos ejemplos

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{x^2-1}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación, reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{2(1)-2}{(1)^2-1}=\frac{0}{0}$$

Como **SÍ** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 3:

Primero: Factorizamos el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

Segundo: Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)}$$

Tercero: Reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x^2-1}=1$$

Otro ejemplo:

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación, reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(2)^2+2(2)-8}{(2)^2-7(2)+10}=\frac{0}{0}$$

Como **SÍ** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 3:

Primero: Factorizamos el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{(x-5)(x-2)}$$

Segundo: Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{(x-5)\cancel{(x-2)}}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-5}$$

Tercero: Reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$\frac{2+4}{2-5}=\frac{6}{-3}=-2$$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}=-2$$

Caso II: Resolver con racionalización del denominador

Este caso ocurre cuando además de una expresión algebraica racional, tenemos que la expresión del denominador está toda dentro de una raíz cuadrada.

Si la indeterminación que se da en este caso es $\frac{0}{0}$ podemos decir con seguridad, que la solución del límite es igual a cero.

Para resolver un límite con este caso, debemos proceder de la siguiente manera:

1. Multiplicamos arriba y abajo por el radical del denominador

2. Factorizamos las expresiones algebraicas en el numerador y en el denominador.
3. Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo.
4. Reemplazamos la variable por el valor dado y obtenemos el resultado del límite.
5. Si aún no se ha quitado la indeterminación, repetimos los pasos 1 al 4 hasta levantar la indeterminación.

Ahora, veamos unos ejemplos

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+1}}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación, reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(-1)^2 - 1}{\sqrt{-1+1}} = \frac{0}{0}$$

Como **sí** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 4:

Primero: Multiplicamos arriba y abajo por el radical del denominador para eliminar la raíz

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}}$$

Recuerde que cuando multiplicamos dos raíces cuadradas que tienen el mismo radicando, las raíces se cancelan y queda lo que está por dentro.

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x+1}}{x+1}$$

Segundo: Factorizamos el numerador y el denominador. En este caso no es necesario factorizar el denominador.

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1}$$

Tercero: Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\sqrt{x+1}}{\cancel{x+1}}$$

$$\lim_{x\to -1} (x-1)\sqrt{x+1}$$

Cuarto: Reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$(-1-1)\sqrt{-1+1} = 0$$

Solución:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

Otro ejemplo:

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{\sqrt{x^3-8}}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación, reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(2)^2+3(2)-10}{\sqrt{2^3-8}} = \frac{0}{0}$$

Como **Sí** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 4:

Primero: Multiplicamos arriba y abajo por el radical del denominador para eliminar la raíz

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+3x-10)\sqrt{x^3-8}}{\sqrt{x^3-8}\cdot\sqrt{x^3-8}}$$

Recuerde que cuando multiplicamos dos raíces cuadradas que tienen el mismo radicando, las raíces se cancelan y queda lo que está por dentro.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+3x-10)\sqrt{x^3-8}}{x^3-8}$$

Segundo: Factorizamos el numerador y el denominador. En el denominador tenemos una diferencia de cubos.

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+5)(x-2)\sqrt{x^3-8}}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

Tercero: Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+5)\cancel{(x-2)}\sqrt{x^3-8}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+5)\sqrt{x^3-8}}{x^2+2x+4}$$

Cuarto: Reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$\frac{(2+5)\sqrt{(2)^3-8}}{(2)^2+2(2)+4} = \frac{0}{12} = 0$$

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{\sqrt{x^3-8}} = 0$$

Caso III: Resolver multiplicando por el conjugado

Este caso ocurre hay una expresión algebraica racional, y en el denominador tenemos una parte de la expresión dentro de un radical y otra parte afuera del radical.

Recuerde que el conjugado de una expresión es la misma expresión pero con signo contrario. El conjugado de $\sqrt{x} - 3$ es $\sqrt{x} - 3$

Para resolver un límite con este caso, debemos proceder de la siguiente manera:

1. Multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador para cancelar las raíces del denominador.
2. Factorizamos las expresiones algebraicas en el numerador y en el denominador.
3. Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo.
4. Reemplazamos la variable por el valor dado y obtenemos el resultado del límite.
5. Si aún no se ha quitado la indeterminación, repetimos los pasos 1 al 4 hasta levantar la indeterminación.

Ahora, veamos unos ejemplos

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 3} - 1}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación, reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(1)^2 + 2(1) - 3}{\sqrt{(1)^2 + 3(1) - 3} - 1} = \frac{0}{0}$$

Como **Sí** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 4:

Primero: Multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador para eliminar la raíz

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 3x - 3} - 1)(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}$$

Recuerde que cuando multiplicamos dos raíces cuadradas que tienen el mismo radicando, las raíces se cancelan y queda lo que está por dentro.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}{x^2 + 3x - 3 - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 2x - 3)(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}{x^2 + 3x - 4}$$

Segundo: Factorizamos el numerador y el denominador.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x + 3)(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}{(x + 4)(x - 1)}$$

Tercero: Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x + 3)\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}{(x + 4)\cancel{(x - 1)}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x + 3)(\sqrt{x^2 + 3x - 3} + 1)}{(x + 4)}$$

Cuarto: Reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$\frac{(1 + 3)(\sqrt{(1)^2 + 3(1) - 3} + 1)}{1 + 4} = \frac{(4)(2)}{5} = \frac{8}{5}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 3} - 1} = \frac{8}{5}$$

Límites Trigonométricos

Para solucionar límites trigonométricos, sugiero que tenga en cuenta los siguientes pasos:

1. Exprese todo en función de **Seno** y **Coseno.**
2. Simplifique todo lo que más pueda y reemplace el valor de x
3. Si aún continúa la indeterminación, busque la forma de llevar la expresión a lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Veamos algunos ejemplos:

Resolver los siguientes ejercicios:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

Primero, expresamos todo en función de Seno y Coseno y luego simplificamos lo que más se pueda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\operatorname{sen}} x}{\cancel{\operatorname{sen}} x \cdot \cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

Debemos completar la expresión $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
para lo cual, multiplicaremos el numerador y el denominador por 3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 3(1) = 3$$

c. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

En este caso, no tenemos nada para simplificar, porque ya todo está expresado en función de Seno.

Tenemos algo parecido a $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ con la diferencia que en el ejercicio $x \to \pi$ y no a 0 como quisiéramos.

Podemos realizar un cambio de variable para lograr la expresión que queremos:

Hagamos $u = x - \pi$

Por la tanto, si $x \to \pi$ entonces $x - \pi$ *tiende a* 0

Esto significa que $u \to 0$

Por lo que nuestro ejercicio original queda:

$$\lim_{u \to 0} \frac{sen\, u}{u} = 1$$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x + x\cos x}$

Para empezar, reemplazaremos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x + x\cos x}$$

Ahora, factorizaremos el numerador y el denominador. En el numerador tenemos una ***diferencia de cuadrados*** y en el denominador tenemos ***factor común.***

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}{x\cancel{(1+\cos x)}}$$

Con lo cual nos queda:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Que por definición:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Límites al Infinito

Estos límites son los más sencillos de todos, porque desde que los vemos, ya sabremos la respuesta, lo único que se debe hacer es el procedimiento que siempre es el mismo para demostrar la respuesta.

A continuación les doy las respuestas dependiendo del caso y luego realizaremos un ejemplo de cada caso:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_1x^m \pm a_2x^{m-1} \pm \ldots \pm a_{m-1}x \pm a_m}{b_1x^n \pm b_2x^{n-1} \pm \ldots \pm a_{n-1}x \pm a_n}$$

$m\ y\ n$ son los exponentes mayors del numerador y denominador respectivamente.

Si $m < n$ $entonces\ el\ valor\ del\ Límite\ es = 0$

Si $m = n$ $entonces\ el\ valor\ del\ Límite\ es = \frac{a_1}{b_1}$

Si $m > n$ $entonces\ el\ valor\ del\ Límite\ es = \infty$

Tengan en cuenta lo siguiente:

Cualquier número dividido entre infinito es igual a cero: $\frac{k}{\infty} = 0$

Cualquier número dividido entre cero es igual a infinito: $\frac{k}{0} = \infty$

Cero dividido entre cualquier número es igual a cero: $\frac{0}{k} = 0$

Para resolver un límite al infinito, se debe dividir cada término de las expresiones algebraicas tanto del numerador como del denominador entre la variable elevada al mayor de los exponentes.

Después, se simplifica las variables entre sí, luego se reemplazan las variables que quedaron con infinito y se obtienen las respuestas dadas arriba.

Para que ésto quede más claro, veamos algunos ejemplos:

- **Resolver el siguiente límite:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 - 2x^3 + 8x + 4}{8x^6 + 12x^4 + 5x + 8}$$

Como podemos ver, el grado de la expresión del numerador (es 5) es menor que el grado de la expresión del denominador (es 6), por lo tanto se da:
$m < n$ $\quad 5 < 6$ lo cual nos indica que la respuesta de este límite es cero.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 - 2x^3 + 8x + 4}{8x^6 + 12x^4 + 5x + 8} = 0$$

Ahora, vamos a resolverlo para demostrar que efectivamente esa es la respuesta:

Dividimos cada término entre la variable elevada al mayor exponente. Es decir, dividimos todo entre x^6

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^5}{x^6} - \frac{2x^3}{x^6} + \frac{8x}{x^6} + \frac{4}{x^6}}{\frac{8x^6}{x^6} + \frac{12x^4}{x^6} + \frac{5x}{x^6} + \frac{8}{x^6}}$$

Simplificamos las variables que quedaron en cada término y obtenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{8}{x^5} + \frac{4}{x^6}}{\frac{8}{1} + \frac{12}{x^2} + \frac{5}{x^5} + \frac{8}{x^6}}$$

Luego, reemplazamos las variables con Infinito:

$$\frac{\frac{3}{\infty} - \frac{2}{\infty^3} + \frac{8}{\infty^5} + \frac{4}{\infty^6}}{\frac{8}{1} + \frac{12}{\infty^2} + \frac{5}{\infty^5} + \frac{8}{\infty^6}}$$

Y como nos dijeron al comienzo, <u>todo número que se encuentre dividido entre infinito es igual a cero</u>. Por lo tanto tenemos ahora:

$$\frac{0 - 0 + 0 + 0}{8 + 0 + 0 + 0} = \frac{0}{8} = 0$$

- **Resolver el siguiente límite:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^7 + 11x^6 - 7x + 5}{4x^7 + 14x^5 + 9x + 15}$$

Como podemos ver, el grado de la expresión del denominador (es 7) es igual que el grado de la expresión del numerador (es 7), por lo tanto se da:

$m = n$ $\quad 7 = 7$ lo cual nos indica que la respuesta de este límite es $\frac{8}{4} = 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^7 + 11x^6 - 7x + 5}{4x^7 + 14x^5 + 9x + 15} = \frac{8}{4} = 2$$

Ahora, vamos a resolverlo para demostrar que efectivamente esa es la respuesta:

Dividimos cada término entre la variable elevada al mayor exponente. Es decir, dividimos todo entre x^7

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{8x^7}{x^7} + \frac{11x^6}{x^7} - \frac{7x}{x^7} + \frac{5}{x^7}}{\frac{4x^7}{x^7} + \frac{14x^5}{x^7} + \frac{9x}{x^7} + \frac{15}{x^7}}$$

Simplificamos las variables que quedaron en cada término y obtenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{8}{1} + \frac{11}{x} - \frac{7}{x^6} + \frac{5}{x^7}}{\frac{4}{1} + \frac{14}{x^2} + \frac{9}{x^6} + \frac{15}{x^7}}$$

Luego, reemplazamos las variables con Infinito:

$$\frac{\frac{8}{1} + \frac{11}{\infty} - \frac{7}{\infty^6} + \frac{5}{\infty^7}}{\frac{4}{1} + \frac{14}{\infty^2} + \frac{9}{\infty^6} + \frac{15}{\infty^7}}$$

Y como nos dijeron al comienzo, todo número que se encuentre dividido entre infinito es igual a cero. Por lo tanto tenemos ahora:

$$\frac{8 + 0 - 0 + 0}{4 + 0 + 0 + 0} = \frac{8}{4} = 2$$

- **Resolver el siguiente límite:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{15x^9 + 4x^6 + 3x - 8}{4x^7 + 14x^5 + 9x + 15}$$

Como podemos ver, el grado de la expresión del numerador (es 9) es mayor que el grado de la expresión del denominador (es 7), por lo tanto se da:
$m > n$ $9 > 7$ lo cual nos indica que la respuesta de este límite es $Infinito$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{15x^9 + 4x^6 + 3x - 8}{4x^7 + 14x^5 + 9x + 15} = \infty$$

Ahora, vamos a resolverlo para demostrar que efectivamente esa es la respuesta:

Dividimos cada término entre la variable elevada al mayor exponente. Es decir, dividimos todo entre x^9

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{15x^9}{x^9} + \frac{4x^6}{x^9} + \frac{3x}{x^9} - \frac{8}{x^9}}{\frac{4x^7}{x^9} + \frac{14x^5}{x^9} + \frac{9x}{x^9} + \frac{15}{x^9}}$$

Simplificamos las variables que quedaron en cada término y obtenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{15}{1} + \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^8} - \frac{8}{x^9}}{\frac{4}{x^2} + \frac{14}{x^4} + \frac{9}{x^8} + \frac{15}{x^9}}$$

Luego, reemplazamos las variables con Infinito:

$$\frac{\frac{15}{1} + \frac{4}{\infty^3} + \frac{3}{\infty^8} - \frac{8}{\infty^9}}{\frac{4}{\infty^2} + \frac{14}{\infty^4} + \frac{9}{\infty^8} + \frac{15}{\infty^9}}$$

Y como nos dijeron al comienzo, todo número que se encuentre dividido entre cero es igual a infinito. Por lo tanto tenemos ahora:

$$\frac{15 + 0 + 0 - 0}{0 + 0 + 0 + 0} = \frac{15}{0} = \infty$$

Volver al inicio

Ejercicios.

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

c) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$